Resumo de Matemática
Exame Nacional Ver. 1.1

Por: Paulo Jorge de Oliveira Cantante de Matos
Instituto Superior Técnico
Engenharia Informática e Computadores
Inteligência Artificial
http://mega.ist.utl.pt/~pocm

10 de Agosto de 2002

Conteúdo

1 Introdução

Antes de iniciar este pequeno resumo gostaria de incluir umas notas para que quando ser estiver a ler isto se lembre do objectivo que isto pretende ter e faça o melhor uso possível deste meu pequeno trabalho!

Bom, em primeiro lugar deixa-me dizer-lhe o que isto não pretende ser:

- Não pretende ser de modo algum uma referência completa da Matemática leccionada no Ensino Superior.
- Não pretende (não é suposto, nem convém que seja) o único suporte do aluno que estuda matemática!

Convém lembrar que mesmo aquele aluno que só pretenda o 10 não deve apoiar o seu estudo teórico apenas nestas folhas! Isto por 2 razões: em primeiro lugar o estudo isolado destas folhas não chega de maneira alguma para passar a matemática (bom, talvez dê daqui a alguns anos observando a descida do nível de dificuldade dos exames nacionais nos últimos anos), e em segundo lugar qualquer aluno que aponte para o 10 a matemática acaba sempre por tirar menos!

Então isto tem como objectivo auxiliar o estudo de um aluno como referência rápida a fórmulas, conceitos e outras ideias importantes! É apenas com este objectivo a que me proponho a este trabalho. Não desaconselho, no entanto, o aluno a ler o seu livro teórico de matématica (sempre com um papel e caneta à mão para poder "gatafunhar" algumas coisas)!

E para entrarmos então no 'core' do trabalho gostaria só de fazer referência ao livro sobre o qual este trabalho foi na sua maioria baseado - XEQMAT 12^o Ano! Alguns outros livros mais avançados foram consultados mas são de pouca importância para o âmbito destas folhas, alguns comentários e analogias pessoais foram quando relevantes colocadas no texto.

Antes gostaria de partilhar convosco um pequeno dicionário para aqueles que por vezes não percebem os Professores de Matemática:

"What mathematics professors say and what they mean by it:
Clearly: I don't want to write down all the "in-between"steps.
Trivial: If I have to show you how to do this, you're in the wrong class.
It can easily be shown: No more than four hours are needed to prove it.
Check for yourself: This is the boring part of the proof, so you can do it on your own time.
Hint: The hardest of several possible ways to do a proof.
Brute force: Four special cases, three counting arguments and two long inductions.
Elegant proof: Requires no previous knowledge of the subject matter and is less than ten lines long.
Similarly: At least one line of the proof of this case is the same as before.
Two line proof: I'll leave out everything but the conclusion, you can't question 'em if you can't see 'em.
Briefly: I'm running out of time, so I'll just write and talk faster.
Proceed formally: Manipulate symbols by the rules without any hint of their true meaning.

Proof omitted: Trust me, It's true."

2 Probabilidades e Análise Combinatória

2.1 Introdução ao Cálculo das Probabilidades

It has been pointed out already that no knowledge of probabilities, less in degree than certainty, helps us to know what conclusions are true, and that there is no direct relation between the truth of a proposition and its probability. Probability begins and ends with probability. - Keynes, John Maynard

É de minha opinião que se existe área da matemática onde é impossível resolver um problema correctamente sem perceber o contexto do problema e todos os conteúdos que o problema abrange, essa área é a das probabilidades! No entanto, nem tudo está perdido dado que a grande maioria dos problemas de probabilidade tem sempre a mesma aproximação ao aluno logo é sempre boa ideia antes de começar a tentar resolver qualquer exercício, estabelecer uma boa relação com o enunciado de modo a conseguir visualizar a situação e saber o que se pretende. A partir deste ponto qualquer resolução torna-se bastante trivial a este nível! Após as primeiras dezenas ou centenas de exercícios torna-se bastante simples e directo de resolver problemas de probabilidades!

A Teoria das Probabilidades ocupa-se de quantificar, isto é, de "medir" o grau de insegurança ou incerteza sobre o resultado de uma experiência.

Tal como a Física se usa da Matemática para resolver os mais diversos problemas, a Estatística usa as Probabilidades e é por isso mesmo que as duas estão intimamente ligadas!

Basicamente a ideia é a seguinte: Nas probabilidades temos uma situação (mais á frente lhe atribuiremos um termo mais técnico) bem definida sobre a qual vamos trabalhar, ou seja, vamos *deduzir* qualquer coisa dessa situação que seja de interesse para o nosso trabalho. Na Estatística não temos a situação bem definida, ou pelo menos não temos usualmente o nosso elemento de trabalho completamente definido mas sim apenas uma porção dele e o que pretendemos fazer é induzir algo acerca do total do nosso elemento de trabalho! Ou seja, em resumo nas probabilidades temos algo de concreto e bem definido sobre o qual queremos tirar conclusões, na estatística temos uma "parte" e queremos tirar conclusões acerca do "todo"!

Definição 2.1 (Experiência Aleatória) *Uma experiência diz-se aleatória se pode ter vários resultados cujo aparecimento, em cada prova da experiência, é impossível prever. Diz-se que o resultado depende do "acaso" ou da "sorte" ou do "azar". Exemplo: Lançar um dado.*

Definição 2.2 (Espaço Amostral) *Chama-se espaço amostral ao conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória. Exemplo: No lançamento do dado o espaço amostral é dado por* $E = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Definição 2.3 (Acontecimento) *Chama-se acontecimento de uma experiência aleatória a qualquer subconjunto do espaço amostral de uma experiência aleatória, incluindo esse espaço amostral e o vazio. Exemplo: No lançamento do dado sair o 6.*

Só em termos de revisão:

$$freq.relativa = \frac{\text{efectivo da classe}}{\text{efectivo total}} = \frac{n}{N}$$

$$\sum freq.relativa = \frac{\sum n}{N} = 1$$

Lei 2.1 (Lei de Bernoulli — Lei dos Grandes Números) *Quando o número de provas aumenta muito, a frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar num determinado valor que se adopta como probabilidade desse acontecimento.*

Teorema 2.1 (Limites do Valor de Probabilidade) *A probabilidade de um acontecimento é sempre um número entre zero e um, extremos inclusíve.*

Definição 2.4 (Acontecimentos Certos e Impossíveis) *Um acontecimento com probabilidade igual a um chama-se certo e a um com probabilidade igual a zero chama-se impossível.*

Teorema 2.2 (Acontecimentos Incompatíveis) *Se A e B são conjuntos disjuntos (ou seja, a sua intersecção é o vazio) e representarem acontecimentos, dizem-se incompatíveis e a probabilidade da sua reunião é igual á soma das probabilidades!*

Teorema 2.3 (Acontecimentos Contrários) *Se A e B são acontecimentos contrários então a sua reunião é um acontecimento certo e a sua intersecção é um acontecimento impossível, isto é, quando um dos acontecimentos não se dá, dá-se com certeza o outro. Deduz-se que a sua reunião resulta então no espaço amostral e a sua interseção no vazio!*

$$A \cup B = E \wedge A \cap B = \emptyset$$

Temos então que dois acontecimentos contrários reunindo as propriedades anteriores têm probabilidades cuja soma é igual a 1, assim sendo a probabilidade de um acontecimento é sempre a diferença entre a unidade e a probabilidade do acontecimento contrário!

Até aqui foram enunciados os axiomas da Teoria das Probabilidades e deduzidas algumas propriedades. Se se chega até aqui sem ter tudo percebido o melhor será sem dúvida voltar atrás porque senão isso será inevitável mais tarde ou mais cedo quando as coisas se começarem a complicar!

Apesar do livro não apoiar explicitamente o uso de Diagramas de Venn para o cálculo de probabilidades eu apoio dado que não só facilita a visualização do problema como ajuda ao cálculo das probabilidades e de outros "bichos". Penso que recorrer durante um problema de probabilidades a um diagrama de Venn é das ideias mais brilhantes após interpretar o problema correctamente que o aluno pode ter! A incentivação aos diagramas de Venn e uma introdução ás probabilidades bastante interessante é dada no livro "Applied Statistics and Probabilities for Engineers" por Montgomery e Runger.

Lei 2.2 (Lei de Laplace) *Se uma experiência aleatória tem n resultados possíveis incompatíveis e equiprováveis, a probabilidade dum acontecimento A é dada por:*

$$p(A) = \frac{num.\ de\ casos\ favoráveis\ a\ A}{num.\ de\ casos\ possíveis} = \frac{\#A}{n} = \frac{\#A}{\#E}$$

Teorema 2.4 (Princípio da Multiplicação) *Se uma tarefa se pode decompor em duas escolhas a fazer sucessivamente, a* 1^a *com* n *possibilidades e a* 2^a *com* m *possibilidades então há* $n.m$ *formas diferentes de realizar a tarefa!*

Já a seguir vamos introduzir um conceito bem ao estilo matemático... O conceito de Variável Aleatória que como vamos ver corresponde nada mais nada menos do que a uma função. Isto torna-se necessário porque sem este conceito acabaríamos por apenas conseguir estudar casos simples o que não interessa porque na realidade os casos de interesse e que a natureza nos impõe de simples não têm nada!

Definição 2.5 (Variável Aleatória) *Variável Aleatória é toda a função que faz corresponder a cada elemento do espaço amostral* E *(ou seja, a cada caso possível) um número real.*

Definição 2.6 (Distribuição de Probabilidade) *Distribuição de Probabilidade de uma variável aleatória* X *é a aplicação que associa a cada valor* x_i *da variável a sua probabilidade* p_i, *(i = 1, 2, ... k). Como é previsível pelo enunciado já atrás a soma das probabilidade de 1 até k tem de ser a unidade! A distribuição de probabilidades será portanto a distribuição limite das distribuições de frequências relativas, quando o número de provas tende para infinito!*

Definição 2.7 (Média) *A Média (também conhecida como valor esperado ou esperança matemática) da variável aleatória* X *que toma os valores* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *com as probabilidades* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *respectivamente, é o número real* $E(X) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$.

A ideia da média é nada mais nada menos do que dizermos qual o valor que está "no centro" de todos os outros valores da distribuição, ou seja, o valor à volta do qual se distribui uniformemente os valores da distribuição.

Definição 2.8 (Variância e Desvio Padrão) *Variância duma variável aleatória* X *que toma os valores* $x_1, x_2, \ldots x_k$ *com as probabilidades* $p_1, p_2, \ldots p_k$ *respectivamente, é o número positivo:* $V = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 p_i - \overline{x}^2$. *O desvio padrão é a raiz quadrada da variância.*

Agora estes valores servem para medir a dispersão dos valores da distribuição, isto é, para medir o maior ou menor afastamento de cada valor do "centro" da distribuição dado pela média. Quanto mais dispersos os valores mais alta é a variância e consequentemente o desvio padrão.

Definição 2.9 (Probabilidade Condicionada) *Sejam* A *e* B *dois acontecimentos e seja* $p(B) \neq 0$. *A probabilidade de se dar* A *sabendo que ocorreu* B *chama-se probabilidade de* A *dado* B, *probabilidade de* A *condicionada por* B *ou probabilidade de* A *se* B *e é dada por* $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Definição 2.10 (Acontecimentos Independentes) *Dois acontecimentos* A *e* B *são independentes se e só se* $p(A|B) = p(A)$.

Se isto assim é então podemos concluir:

Definição 2.11 (Intersec. de Acontecimentos Indep.) A *e* B *independentes* $\Leftrightarrow p(A \cap B) = p(A).p(B)$.

Daqui podemos verificar que se dois acontecimentos forem contrários (ou incompatíveis não podem ser independentes) porque como é simples de perceber, um está dependente da ocorrência do outro por definição.

E assim terminamos a secção...

2.2 Análise Combinatória

It is not primarily the responsibility of a statistician to make decisions for other people — not in general at any rate ... It is for someone else to say what decisions should be made with [inferential] ... information. In other words, ideally, it is the statisticians job to inform not to decide. - Kerridge, D. F.

Esta secção vai basicamente ensinar um novo método de contagem para além do trivial usado na secção anterior e aplicar esse novo método as probabilidades, nada de complicado, claro, se como sempre não se perder nenhum passo ao longo da apresentação dos tópicos!

Método 2.1 (Cardinal do Produto Cartesiano) *Dados 2 conjuntos N e V de quaisquer tipos de elementos podemos criar um conjunto de pares ordenados usando o produto externo:*

$$N \times V = \{(n, v) : n \in N, v \in V\}$$

Obtemos assim um conjunto cujos elementos são pares, em que primeiro elemento pertence ao conjunto N e o segundo elemento ao conjunto V. E temos a seguinte propriedade:

$$\#(N \times V) = \#N.\#V$$

Por palavras: O cardinal do produto e o produto dos cardinais. Atenção que o primeiro produto é o produto externo (dado que estamos a trabalhar com conjuntos e o segundo é o produto usual.

Método 2.2 (Número de Arranjos Completos) *Quem percebeu o caso anterior não tem razão para não perceber este dado que este não passa de um caso particular do anterior em que o produto externo do conjunto em vez de ser feito com outro conjunto é feito com ele mesmo!*

Então é simples de ver: Temos n elementos e queremos juntá-los p a p. Assim sendo temos arranjos com repetição (ou completos) de n, p a p e escreve-se ${}^nA'_p = n^p$.

Método 2.3 (Número de Arranjos Simples) *Este tipo de arranjos (simples ou sem repetição) diferem do anterior dado que não existe repetição de um elemento na sua sequência ou seja, este tipo de arranjos pega no resultado do arranjo anterior e remove todas as sequências criadas que têm 1 ou mais elementos repetidos!*

E então:

$${}^nA_p = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-(p-1)) = \prod_{i=1}^{i=p-1} n - i$$

Os alunos chegam usualmente a este nível usualmente sem saberem o que significa a última expressão acima o que pode simplificar substancialmente a *memorização de algumas expressões. Aquilo não é nada mais nada menos que a 'versão' produto de um somatório ou seja, em vez de se somarem termos, multiplicam-se! É conhecido por Piatório ou Produtório, e usualmente a escolha do nome depende do gosto do professor, tornando-se para alguns infelizmente quase uma religião no entanto, os dois nomes podem ser usados!*

Podemos já introduzir um simples caso particular cujo nome é permutações e é dado por:

$$^{n}A_n = P_n = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 2.1 = \prod_{i=1}^{i=n} i = n! \quad n \in \mathbb{N}$$

Por convenção $0! = 1$.

Ate agora a única coisa que se fez foi criar conjuntos de sequências (ou pares no caso apenas de 2) usando o produto externo. É extremamente importante não confundir o que se fez até agora. Começámos por definir o produto externo de dois conjuntos e perceber que o conjunto resultante consistia num par ordenado com os elementos de cada um dos conjuntos e que o cardinal do conjunto final e o produto dos cardinais dos conjuntos originais. Depois particularizamos para o caso em que o produto externo é feito apenas com um conjunto, é o produto externo de um conjunto por si mesmo em que obtemos arranjos com repetição e criamos a notação e a simples formula de cálculo. Com isto agora precisamos de uma maneira de remover as repetições e criámos os arranjos sem repetições que pegam nas sequências que temos removem todas aquelas com repetições e particularizamos para o caso de termos arranjos de n elementos, n a n o que veio chamar á festa as permutações e o factorial, no entanto não esta tudo, falta-nos algo que tire também a necessidade de termos pares ordenados (ou sequências ordenadas), ou seja, a necessidade de contar (a, b) e (b, a) como dois elementos... E então vêem também as combinações juntar-se á festa!

Método 2.4 (Combinações) *Como já dissemos as combinações não são mais que o número de sequências que criamos cuja ordem dos seus elementos não interessa, interessa sim, apenas o conteúdo das sequências. Temos então que:*

$$\binom{n}{p} = {}^{n}C_p = \frac{^{n}A_p}{P_p} = \frac{\prod_{i=1}^{i=p-1}(n-i)}{p!}$$

Dada a importância das combinações vamos ver algumas propriedades:

Teorema 2.5 (Número de Conjuntos) *O número total de subconjuntos, ou partes dum conjunto, com n elementos é* 2^n.

Propriedade 2.1 (Somatório de Combinações)

$$\sum_{i=0}^{n} {}^{n}C_i = 2^n \qquad \forall_{n\in\mathbb{N}_0}$$

Propriedade 2.2 (Simetria das Combinações)

$$^{n}C_p = {}^{n}C_{n-p} \qquad \forall_{n,p\in\mathbb{N}_0} p \leq n$$

Propriedade 2.3 (Decomposição de Combinações)

$$^{n}C_p = {}^{n-1}C_p + {}^{n-1}C_{p-1} \qquad \forall_{n,p\in\mathbb{N}} p \leq n$$

Corolário 2.1 (Igualdade de Somatórios de Combinações)

$$\sum_{p=0}^{n} {}^{n}C_p = 2\sum_{p=0}^{n-1} {}^{n-1}C_p$$

Fórmula 2.1 (Binómio de Newton)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_k . a^{n-k} . b^k$$

Definição 2.12 (Distribuição Binomial de Probabilidades) *Uma experiência aleatória que consiste em n amostragens tal que:*

1. *As amostragens são independentes.*
2. *O resultado de cada amostragem só tem dois possíveis resultados denominados: "sucesso" e "insucesso".*
3. *A probabilidade de um sucesso em cada amostragem, denotada como p permanece constante*

é chamada uma experiência binomial.
A variável aleatória X que é igual ao número de amostragens que resulta num sucesso ou insucesso segue uma distribuição binomial com parametros p e $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$p(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad E(X) = np \qquad V(X) = np(1-p)$$

Apresentamos então a função de probabilidade, a média (valor esperado) e a variância.

Antes de terminar esta secção gostaria de deixar um problema com a respectiva solução sobre probabilidades o qual se encontra com mais detalhe em "The Man who Loved Only Numbers" por Paul Hoffman.

Este problema muito interessante baseia-se nos concursos televisivos que oferecem montes de dinheiro (quem diria que destes concursos conseguisse sair algo de inteligente!). Estamos então num concurso com 3 portas, atrás de 2 delas estão cabras e na outra o carro, nós escolhemos a porta número 1 e o apresentador que sabe onde está o carro abre a outra porta e aparece uma cabra! E pergunta-nos se queremos ou não mudar a nossa escolha! É conhecido pelo dilema de Monty Hall devido a um concurso clássico televisivo de Monty Hall. Foi um problema que muito deu que falar durante algum tempo dado que uma colunista (que era a recordista mundial para o QI mais elevado - 228) para um jornal propôs que se continuassemos com a escolha original as probabilidades de acertarmos seriam de 1/3 enquanto que se mudarmos de ideias para a outra porta duplicamos a probabilidade para 2/3. Para convencer os leitores da sua coluna pediu aos leitores para imaginarem 1 milhão de portas e para que escolhessem a porta número 1. Após a escolha o apresentador que sabia novamente onde estava o prémio abria todss as portas excepto a porta 777777! E agora, mudaria a sua escolha ou não?

Bom, seja como for isto provocou bastante agitação na comunidade matemática dado que muitos matemáticos defendiam a hipótese de a probabilidade passar a 50% a favor da troca ao invés dos 2/3! Doutorados de todo o mundo escreviam cartas a colunista a dizer-lhe o quanto estava errada e Scott Smith, doutorado da Florida, chegou mesmo a dizer: "Existe iliteracia matemática em quantidade suficiente neste pais e não precisamos do maior QI do mundo para propagar mais."

No entanto a colunista mostrou a seguinte tabela:

Mantendo a escolha da primeira porta:

Porta 1	Porta 2	Porta 3	Resultado
Carro	Cabra	Cabra	Ganha
Cabra	Carro	Cabra	Perde
Cabra	Cabra	Carro	Perde

Mudando a escolha:

Porta 1	Porta 2	Porta 3	Resultado
Carro	Cabra	Cabra	Perde
Cabra	Carro	Cabra	Ganha
Cabra	Cabra	Carro	Ganha

Mesmo assim, pareceu não convencer os matemáticos que continuavam indignados com este problema! Chegaram mesmo a perguntar quantos matemáticos seriam necessários para fazer com que a colunista mudasse de opinião! Ela afirmou que "Quando a realidade choca tão violentamente com a intuição as pessoas ficam abaladas!". E no entanto ainda decidiu tentar mais uma vez convencer as pessoas desta vez por outra via pedindo que imaginassem que assim que o apresentador abrisse a porta revelando a cabra aparecesse um ovni e de dentro dele saisse uma mulher verde! Essa sim, tinha 50% de hipóteses de ganhar se tivesse que escolher a sorte a porta com o carro. No entanto, ela não tem a vantagem do concorrente inicial — a ajuda do apresentador ... Se o carro estiver atrás da porta 3, o apresentador abre a 2. Portanto se mudarmos de escolha ganhamos sempre que o prémio esteja atrás da porta 2 ou da 3. Ganhamos de qualquer modo! Mas se não mudarmos só ganhamos se estiver atrás da porta número 1. A colunista tinha então a razão toda do seu lado, como os matemáticos mais tarde, passando por idiotas, acabaram por admitir!

3 Função Exponencial e Logarítmica

It is the invaluable merit of the great Basle mathematician Leonhard Euler, to have freed the analytical calculus from all geometric bounds, and thus to have established analysis as an independent science, which from his time on has maintained an unchallenged leadership in the field of mathematics. - Reid, Thomas

Não posso resistir a dizer o quanto gosto deste e do próximo capítulo, tal como de todo o cálculo em geral e mencionar o nome de Leonhard Euler, que para além de ser um grande matemático foi também um homem que dedicou a sua vida aquilo que gostava, a matemática. Impressionante foi aquilo que disse quando aos 26 anos perdeu um olho: "Now I will have less distraction."! Laplace chegou mesmo a dizer: "Read Euler: he is our master in everything!".

Bom, então antes de entrarmos em força nuns "bichos" mais esquisitos vamos dar uma olhada nas conhecidas potências de expoente real e nas suas propriedades.

Definição 3.1 (Potência de Expoente Real)

$$a^r \in \mathbb{R}^+ \qquad \forall_{a>0} \forall_{r \in \mathbb{R}}$$

Propriedade 3.1 (Potências)

$$a^r.a^s = a^{r+s}$$

Propriedade 3.2 (Potências)

$$a^r/a^s = a^{r-s}$$

Propriedade 3.3 (Potências)

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

Propriedade 3.4 (Potências)

$$a^r.b^r = (ab)^r$$

Propriedade 3.5 (Potências)

$$a^r/b^r = (a/b)^r$$

Propriedade 3.6 (Potências)

$$a^{-r} = 1/a^r$$

Após esta pequena revisão das potências e suas propriedades vamos entrar na parte interessante propriamente dita!

Definição 3.2 (Logaritmo) *Logaritmo dum número, numa dada base é o expoente a que é preciso elevar a base para obter o número.*

Propriedade 3.7 (Potências e Logaritmos) *Por definição:* $a^{\log_a N} = N$ *e* $\log_a a^y = y$

Propriedade 3.8 (Base do Logaritmo) *A base dos logaritmos é sempre um número positivo e diferente de 1 : base* $\in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$.

Propriedade 3.9 (Domínio do Logaritmo) *Em qualquer base, só os números positivos têm logaritmo.*

Propriedade 3.10 (Logaritmo e a Unidade) *Em qualquer base a,* $\log_a 1 = 0$ *e* $\log_a a = 1$

Propriedade 3.11 (Logaritmo de Base Positiva) *Se* $a > 1$*, então* $\log_a N > 0$ *sse* $N > 1$.

Propriedade 3.12 (Logaritmo do Produto) *O logaritmo do produto é igual á soma dos logaritmos dos factores.*

$$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v \qquad (u, v \in \mathbb{R}^+)$$

Propriedade 3.13 (Logaritmo do Quociente) *O logaritmo do quociente é igual á diferença entre os logaritmos dos termos.*

$$\log_a(u/v) = \log_a u - \log_a v \qquad (u, v \in \mathbb{R}^+)$$

Propriedade 3.14 (Logaritmo da Potência) *O logaritmo da potência é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base.*

$$\log_a u^v = v. \log_a u$$

Propriedade 3.15 (Troca de Bases do Logaritmo) *O logaritmo de u na base v é o inverso do de v na base u.*

$$\log_v u = \frac{1}{\log_u v}$$

Teorema 3.1 (Número de Neper)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e = 2.7182818284\ldots$$

Corolário 3.1 (Número de Neper)

$$\left(1 + \frac{k}{v_n}\right)^{v_n} \to e^k \qquad \textit{qualquer que seja o infinitamente grande } v_n.$$

Fórmula 3.1 (Mudança de base em Logaritmos)

$$\log_\beta \alpha = \frac{\ln_\alpha}{\ln_\beta} \qquad e \qquad \log_\beta \alpha = \frac{\log_{10} \alpha}{\log_{10} \alpha}$$

E agora algumas propriedades da exponencial com base maior que 1.

Propriedade 3.16 (Domínio e Continuidade da Função Exponencial) *O Domínio da função exponencial é* $\mathbb{R}$ *e é contínua em todo o domínio!*

Propriedade 3.17 (Alguns limites triviais da Função Exponencial)

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \qquad e \qquad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

Propriedade 3.18 (Contradomínio da Função Exponencial) *Contradomínio é* $\mathbb{R}^+$.

Propriedade 3.19 (Injectividade e Monotonia da Função Exponencial) *A função é injectiva e estritamente crescente em* $\mathbb{R}$.

Propriedade 3.20 (Zeros da Função Exponencial) *Não tem zeros.*

Propriedade 3.21 (Gráfico da Função Exponencial) *O gráfico corta o eixo das ordenadas no ponto 1 e admite assimptota horizontal* $y = 0$ *quando* $x \to \infty$. *Não tem assimptotas verticais nem oblíquas.*

Propriedade 3.22 (Crescimento da Função Exponencial) *O crescimento de* a^x, *com* $a > 1$, *é tão rápido que se tem*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^k} = +\infty \qquad \forall_{k \in \mathbb{R}}$$

A exponencial cresce mais depressa do que qualquer potência do seu expoente. ($base > 1$)

Fórmula 3.2 (Um Limite da Exponencial)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Dado que a partir daqui vamos começar a introduzir algumas derivadas e a começar a trabalhar com elas não seria mau relembrar a definiçao de derivada em $\mathbb{R}$, através da qual se conseguem achar aquelas maravilhosas regras de derivação que muitos pensam ter caído do céu.

Definição 3.3 (Derivada)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Então podemos agora continuar a nossa digressão pelas funções exponenciais e logarítmicas.

Fórmula 3.3 (Derivada da Função Exponencial)

$$(e^x)' = e^x$$

Por vezes muitos dizem que não percebem a matemática e/ou têm muita dificuldade. Só acredito nisso numa pessoa que não consiga decorar (nem peço que ela perceba) a fórmula anterior, caso contrário a pessoa sofre é de falta de estudo (e muitos também de umas cabeçadas na parede para ver se acordam).

Atrás mencionamos as propriedades da exponencial com base maior que 1. Vamos então dar uma vista de olhos na exponencial de base menor que 1.

Propriedade 3.23 (Propriedades da Função Exponencial de Base Menor que 1) *A exponencial de base menor que 1 é decrescente, contínua, injectiva e sem zeros.*

O que fizemos com a exponencial anteriormente, faremos agora com a função logarítmica.
Então vamos ver algumas das propriedades da função logarítmica de base maior que 1.

Propriedade 3.24 (Domínio da Função Logarítmica) *Domínio* $= \mathbb{R}^+$ *(Só os reais positivos têm logaritmo.)*

Propriedade 3.25 (Contradomínio da Função Logarítmica) *Contradomínio* $= \mathbb{R}$

Propriedade 3.26 (Alguns limites triviais da Função Logarítmica)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

Propriedade 3.27 (Monotonia, Injectividade e Continuidade da Função Logarítmica) *Estritamente crescente. Injectiva. Contínua.*

Propriedade 3.28 (Zeros da Função Logarítmica) *Para todas as funções desta família, 1 é o único zero, visto que* $\log_a 1 = 0 \quad \forall_{a \in \mathbb{R}^+_{\backslash\{1\}}}$. *Isto significa que todos os gráficos passam em* $(1, 0)$.

Propriedade 3.29 (Assimptotas da Função Logarítmica) *O gráfico tem uma única assimptota vertical de equação* $x = 0$.

Propriedade 3.30 (Crescimento da Função Logarítmica) *Os crescimento de* $\log_a x$ *é muito lento pelo que* $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\log_a x} = +\infty$, *ou seja,* $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0$ *o que se exprime assim: Uma variável cresce mais depressa que o seu logaritmo.*

Fórmula 3.4 (Um Limite da Função Logarítmica)

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = 1 \qquad \textit{(base e)}$$

Fórmula 3.5 (Derivada do Logaritmo Natural)

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Assim terminamos o estudo introdutório destas funções de grande simplicidade mas com uma enorme aplicação. Apesar, no entanto, destas funções serem bastante simples podem por vezes trazer complicação nos cálculos e aumentar a complexidade do problema mas isso depende do contexto em que se encontram e não da função em si. No entanto, estudar as funções aprofundadamente é meio caminho andado em relação á resolução de qualquer problema.

4 Limites e Continuidade

4.1 Limites de Funções Reais de Variável Real

The reader will find no figures in this work. The methods which I set forth do not require either constructions or geometrical or mechanical reasonings: but *only algebraic operations, subject to a regular and uniform rule of procedure. - Lagrange, Joseph-Louis*

Definição 4.1 (Limite à Heine) *Diz-se que $f(x)$ tende para **b** quando x tende para **a** e escreve-se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ se a toda a sucessão (x_n) de valores de x, do domínio de f, tendendo para **a** (com $x_n \neq a$), corresponde uma sucessão de valores de $f(x)$ tendente para **b**.*

Definição 4.2 (Limites Laterais) *Diz-se que b é **limite à esquerda** de $f(x)$ no ponto a, se a toda a sucessão (x_n) de valores do domínio, com $x_n < a$ e $x_n \to a$, corresponde a uma sucessão $(f(x_n))$ convergente para b.*
*Diz-se que b é **limite à direita** de $f(x)$ no ponto a, se a toda a sucessão (x_n) de valores do domínio, com $x_n > a$ e $x_n \to a$, corresponde a uma sucessão $(f(x_n))$ convergente para c.*
Escreve-se:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = b \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = c$$

Assim sendo, é simples de ver que a função tem limite num ponto sse existir limite à esquerda e à direita desse ponto e estes forem iguais.

Teorema 4.1 (Limite da Soma) *Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem e não são infinitos de sinais contrários, então:*

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

Teorema 4.2 (Limite do Produto) *Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem e não são um deles zero e outro infinito, então:*

$$\lim_{x\to a} [f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

Corolário 4.1 (Limite da Potência) *Pelo teorema anterior pode-se concluir que:*

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Teorema 4.3 (Limite do Quociente) *Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem e $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ e os dois limites não são ambos infinitos), então:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Teorema 4.4 (Limites Infinitos) *A expressão $\frac{\pm\infty}{k} = +\infty$ exprime simbolicamente que o quociente dum infinitamente grande por uma sucessão convergente para $k > 0$ é ainda um infinitamente grande. (Para $k < 0$, conclusão é análoga.)*
A expressão $\frac{k}{+\infty} = 0$ exprime que o quociente de qualquer sucessão convergente para k (portanto k finito) por um infinitamente grande é um infinitésimo.

Pode-se concluir então:

- $\frac{k}{\pm\infty} = 0$

- $\frac{\pm\infty}{k} = \pm\infty$ se $k > 0$
- $\frac{\pm\infty}{k} = \mp\infty$ se $k < 0$

Teorema 4.5 (Limite da raiz) *Se existe* $\lim_{x \to a} g(x)$ *e se é maior ou igual a zero, então:*

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)} \qquad \forall_{n \in \mathbb{N}}$$

Antes de prosseguir ao encontro das indeterminações seria bom dar uma olhada aos infinitamente grandes.

- $+\infty + \infty = +\infty$
- $-\infty - \infty = -\infty$
- $+\infty \pm k = +\infty$
- $-\infty \pm k = -\infty$
- $+\infty \times k = +\infty \qquad$ se $k > 0$
- $+\infty \times k = -\infty \qquad$ se $k < 0$
- $-\infty \times k = -\infty \qquad$ se $k > 0$
- $-\infty \times k = +\infty \qquad$ se $k < 0$
- $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$
- $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$
- $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$

Método 4.1 (Levantar Indeterminações $(\infty - \infty)$) *O levantamento de indeterminações deste tipo resume-se a colocar sempre o termo de maior grau em evidência fazendo com que normalmente se obtenha uma operação simples sem indeterminações a qual pode ser resolvida de imediato ou simplidicada usando as propriedades dos limites já enunciadas.*
Analiticamente resume-se a:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n) = \lim_{x \to \pm\infty} a_0 x^n$$

Método 4.2 (Levantar Indeterminações $\frac{\infty}{\infty}$) *Nesta situação basta-nos executar a mesma operação do método anterior ao denominador e ao numerador obtendo então um limite mais simples e solúvel por métodos conhecidos anteriormente.*
Analiticamente resume-se a:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m} \qquad (a_0 \neq 0, b_0 \neq 0)$$

Método 4.3 (Levantar Indeterminações $\frac{0}{0}$) *Na maioria destes casos não existe uma "fórmula" para a resolução deste tipo de indeterminação no entanto não quer dizer que levantar uma expressão deste tipo seja um problema porque resume-se a factorizar o numerador e o denominador (por vezes multiplicar pelo seu conjugado) e depois utilizar as formas já conhecidas de resolução de limites.*

Método 4.4 (Levantar Indeterminações $0 \times \infty$) *Esta indeterminação transforma-se numa das anteriores usando transformações algébricas (ou seja, alguns cálculos).*

Neste momento, tal como os conteúdos são usualmente leccionados (pelo que sei) passariamos directamente para o estudo das assimptotas mas dado que não tou "apertado" de tempo nem tão pouco sobre qualquer tipo de ordens do nosso ministério da (des)educação gostaria de fazer aqui um parênteses sobre uma regra que não é leccionada actualmente mas eu apresentá-la-ei não só pela sua simplicidade como pela sua ajuda em resolver limites. No entanto, faço notar que ela não é leccionada no Ensino Secundário (não se inclui no programa de matématica do secundário logo a sua utilização em exames nacionais não deve ser válida). No entanto, por vezes sabendo a solução do exercício torna-se mais fácil resolvê-lo logo, se existir tempo, consegue-se a solução do limite por esta regra e depois mais facilmente se resolve o limite!

Teorema 4.6 (Regra de Cauchy) *Sejam f e g duas funções diferenciáveis definidas no intervalo $]a, b[$ $(a, b \in \mathbb{R}; a < b)$ e verificando as duas condições seguintes:*

1. $g'(x) \neq 0$, *para cada* $x \in]a, b[$;
2. $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$.

ou então

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = +\infty$$

Nestas condições, se existe (em $\mathbb{R}$) o $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, existe também o $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e tem o mesmo valor.

Para os mais interessados podem ver uma demonstração deste teorema em "Introdução á Análise Matemática" por J. Campos Ferreira.

Método 4.5 (Assímptotas verticais) *A recta de equação $x = a$ é assimptota vertical do gráfico da função f sse:*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

Todas as funções definidas por fracções tem assimptota vertical em cada zero do denominador desde que o numerador não se anule nesse ponto e que este seja ponto de acumulação do domínio.

Agora estou a ouvir aí muita gente e perguntar o que é um ponto de acumulação. Apesar de já terem com certeza ouvido falar, visto que não é uma coisa que se fale todos os dias e não é usual ser necessário saber estes "detalhes" na maioria dos testes têm *alguma* desculpa.

Definição 4.3 (Ponto de Acumulação) *Diz-se que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é um ponto que acumulação se para qualquer vizinhança de a tem pelo menos um ponto de $X \subset \mathbb{R}$ distinto de a.*
Simbolicamente:

$$a \text{ é ponto de acumulação} \iff \forall_{\epsilon > 0} V_\epsilon(a) \cap (X_{\setminus\{a\}}) \neq \emptyset$$

Teorema 4.7 (Ponto de Acumulação) *Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$; para que a seja ponto de acumulação de X é necessário e suficiente que qualquer vizinhança de a contenha infinitos elementos do conjunto X (isto é, que para qualquer $\epsilon > 0$ o conjunto $V_\epsilon(a) \cap X$ seja infinito.*

Método 4.6 (Assimptotas Não Verticais) *Assimptotas horizontais não passam de casos particulares de assimptotas oblíquas logo, o estudo destes dois tipos (que na realidade é apenas um) pode ser feito em conjunto. No entanto, vamos ver uma de cada vez e a maneira que juntar estes dois tipos vem de modo trivial. A recta $y = b, b \in \mathbb{R}$, é* ***assímptota horizontal*** *do gráfico da função f, sse:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} = b$$

Uma recta de equação $y = mx + b$ diz-se ***assímptota obliqua*** *do gráfico da função f, sse:*

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

Consegue-se obter o seguinte:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \wedge \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = b$$

Assim sendo, dado que uma assímptota horizontal é uma assímptota oblíqua em que $m = 0$ podemos calcular primeiro m para saber o tipo da assímptota e depois calcular de seguida b obtendo assim um estudo completo de maneira bastante directa!

Antes de terminar esta parte gostaria só de deixar um pequeno desafio, o qual à primeira vista parece terrívelmente simples, no entanto tenho vindo a notar desde que ele me foi proposto (há 2 anos e pouco) que ninguém o consegue resolver correctamente como seria de esperar.
Perguntei-me se deveria colocar a solução para o problema e acho que sim pois não passa de um pequeno truque que uma vez aprendido é sempre aplicável quando qualquer coisa de diferente e com alguma semelhança a este problema nos aparece pela frente.
O enunciado é trivial, a solução...

É pedido a derivada de $f(x)$ sendo $f(x) = x^x$. Antes de mais gostaria que pegasse num papel e numa caneta e tentasse porque a solução é tão simples que se não o fizer quando a vir vai pensar provavelmente que conseguiria fazer, no entanto ao pegar na caneta vai perceber que talvez assim não seja.

Bom, vou acreditar que tentou fazer e prosseguir. Qualquer solução do tipo: $f'(x) = x.x^{x-1}.1$ ou $f'(x) = x^x.1.\log a$ e isto é resultado de aplicar as regras de derivação da potência e da exponencial respectivamente vão dar ambas o mesmo resultado que é a própria função. O problema está que temos o expoente a variar e a base também e as regras que usámos são para expoente constante e base constante respectivamente. Ora, assim sendo ou arranjamos uma fórmula para uma função com variável no expoente e na base ou então transformamos a função e é isso mesmo que vamos fazer, vamos transformá-la por duas razões. Primeiro porque um problema muito mais interessante que o de arranjar a fórmula vem mais à frente e em segundo lugar não aplicaríamos num contexto simples algumas das propriedades que aprendemos até aqui.

A resolução passa então por transformar a função até termos uma expressão equivalente mas sem variável na base e depois derivarmos de forma trivial a expressão obtida. Então a resolução é a seguinte:

$$\begin{aligned} f'(x) = (x^x)' \Leftrightarrow & \quad (1) \\ \Leftrightarrow (e^{\ln x^x})' \Leftrightarrow & \quad (2) \\ \Leftrightarrow (e^{x \ln x})' \Leftrightarrow & \quad (3) \\ \Leftrightarrow e^{x \ln x}(\ln x + 1) \Leftrightarrow & \quad (4) \\ \Leftrightarrow x^x(\ln x + 1) & \quad (5) \end{aligned}$$

Dou-lhe os meus sinceros parabéns se realmente acertou este problema. Voltaremos a ele mais adiante.

4.2 Continuidade de Funções Reais de Variável Real

Calculus required continuity, and continuity was supposed to require the infinitely little; but nobody could discover what the infinitely little might be. - Russel, Bertrand

Definição 4.4 (Continuidade) *Uma função $f(x)$ diz-se contínua no ponto x_0, sse:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definição 4.5 (Continuidade Lateral) *Uma função $f(x)$ diz-se que é* ***contínua à esquerda ou à direita*** *no ponto x_0 se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ ou $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ respectivamente.*

Propriedade 4.1 (Continuidade de funções) *Se f e g são funções contínuas no ponto x_0, então, nesse ponto, $f + g$, $f - g$, $f \times g$ são funções contínuas;*

- *f^n é contínua ($n \in \mathbb{N}$);*
- *$\frac{f}{g}$ é contínua se $g(x_0) \neq 0$;*
- *$\sqrt[n]{f}$ é contínua se $x_0 \in D_{\sqrt[n]{f}}$*

Teorema 4.8 (Continuidade numa Vizinhaça) *Se f é contínua em x_0 então existe uma vizinhança $V_\epsilon(x_0)$ onde $f(x)$ é limitada (tem majorante e minorante).*

Corolário 4.2 (Zeros numa Contínua) *Se f é contínua em x_0 e se $f(x_0) \neq 0$ então há uma vizinhança de x_0 onde f não se anula, isto é, onde se mantém o sinal de $f(x_0)$.*

Teorema 4.9 (Função Contínua num Intervalo) *Uma função real de variável real é contínua num intervalo do seu domínio se for contínua em todo o ponto desse intervalo.*

Teorema 4.10 (Teorema de Bolzano) *Uma função contínua num intervalo não passa de um valor a outro sem passar por todos os valores intermédios.*

Corolário 4.3 (Bolzano) *Se f é contínua em $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários, então existe pelo menos um zero da função f no intervalo $]a, b[$.*

5 Derivadas

In the fall of 1972 President Nixon announced that the rate of increase of inflation was decreasing. This was the first time a sitting president used the third derivative to advance his case for reelection. - Rossi, Hugo

Definição 5.1 (Derivada (ou taxa de variação)) *Sendo f uma função real de variável real e x_0 um ponto de acumulação do seu domínio, chama-se* ***derivada de f no ponto*** *x_0 a $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, se este limite existe.*

Fórmula 5.1 (Derivada) *Podemos usar a fórmula da definição apresentada acima ou então com uma simples substituição podemos usar a seguinte fórmula (já apresentada anteriormente):*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Teorema 5.1 (Derivabilidade e Continuidade num Ponto) *Se uma função tem derivada finita num ponto, é contínua nesse ponto.*

Vamos apresentar então de seguida algumas regras de derivação, outras regras podem ser derivadas destas mas penso que não vale a pena apresentá-las todas dado que não é objectivo destas folhas ser um formulário de regras de derivação até porque formulários é o que não falta por aí. No entanto, aconselho-o a demonstrar as fórmulas que faltam neste formulário, é sempre um bom treino.

Fórmula 5.2 (Derivada da Soma)

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Fórmula 5.3 (Derivada do Produto)

$$(f.g)'(x) = f'(x).g'(x) + g'(x).f(x)$$

Fórmula 5.4 (Derivada do Quociente)

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{g^2(x)}$$

Fórmula 5.5 (Derivada da Composta)

$$(g \circ f)'(x) = g'(u).f'(x) \qquad \textit{com } u = f(x)$$

Fórmula 5.6 (Derivada da Exponencial)

$$(a^u)'_x = a^u.\ln a.u'_x \qquad \textit{em que } u \textit{ é função de } x.$$

Fórmula 5.7 (Derivada da Logarítmica)

$$(\log_a u)'_x = \frac{u'_x}{u.\ln a}$$

Teorema 5.2 (Monotonia) *Se uma função tem derivada* ***positiva*** *ou* ***nula*** *em todos os pontos de um intervalo, é crescente em sentido lato nesse intervalo. Se uma função tem derivada* ***negativa*** *ou nula em todos os pontos de um intervalo, é decrescente em sentido lato nesse intervalo.*

Teorema 5.3 (Extremos) *Se uma função tem primeira derivada nula num ponto e derivadas à esquerda e à direita do ponto com sinais diferentes então esse ponto é um extremo local. (máximo se a derivada é positiva à esquerda e negativa à direita, mínimo, caso contrário)*

Teorema 5.4 (Concavidades) *Se uma função tem segunda derivada **positiva** em todos os pontos de um intervalo, então tem a concavidade voltada para cima nesse intervalo.*
*Se uma função tem derivada **negativa** em todos os pontos de um intervalo, tem concavidade voltada para baixo nesse intervalo.*

Teorema 5.5 (Ponto de Inflexão) *Se uma função tem segunda derivada nula num ponto e segundas derivadas à esquerda e à direita do ponto com sinais diferentes então esse ponto é um ponto de inflexão.*

Terminamos assim esta parte e podemos fazer um estudo completo de uma função com o que já foi apresentado, no entanto penso que será relembrar a paridade de uma função.

Teorema 5.6 (Paridade de uma função) *Uma função diz-se **par** se for simétrica em relação ao eixo das ordenadas (usualmente designado por eixo dos yy's):* $f(x) = f(-x)$
*Uma função diz-se **ímpar** se for simétrica em relação à origem:* $f(-x) = -f(x)$

Antes de terminar gostaria de deixar um pequeno desafio, relativamente simples quanto a uma propriedade engraçada com que me deparei ao brincar com o problema proposto anteriormente da derivação de x^x.
Gostaria de prôpor o seguinte: Dado o conjunto de funções do tipo x, x^x, $(x^x)^x$, $((x^x)^x)^x\ldots$ construa um algoritmo, isto é, uma sequência de passos (uma receita) para achar a derivada (sem utilizar qualquer tipo de derivação) de qualquer função do conjunto sabendo o número de x que temos na função. Apesar de poder parecer complicado, não o é, gostaria que tentassem. Decidi neste caso não deixar a solução mas se algum de vós estiver interessado na minha resolução do problema pode pedi-la através do meu contacto de email `pocm@mega.ist.utl.pt`.

6 Trignometria

Mathematics has beauties of its own – a symmetry and proportion in its results, a lack of superfluity, an exact adaptation of means to ends, which is exceedingly remarkable and to be found only in the works of the greatest beauty When this subject is properly... presented, the mental emotion should be that of enjoyment of beauty, not that of repulsion from the ugly and the unpleasant. - Young, J. W. A.

Acredito que ao chegar a este nível se recorde dos básicos da trigonometria dada não só no 11^o como no 9^o (pelo que consigo recordar). Logo, deixarei a definição das 4 funções trigonométricas básicas para outra situação!

Já agora antes de começarmos gostaria só de avisar que ao contrário de noutras referências aqui usarei as palavras sem hífen, em vez de o usar como é

normal (por exemplo: escreverei coseno em vez de co-seno) por variadas razões no entanto em vezes de explicar, citarei o Prof. Emeritus de Stanford que deu à algum tempo a mesma explicação para o uso de email em vez de e-mail:
Newly coined nonce words of English are often spelled with a hyphen, but the hyphen disappears when the words become widely used. For example, people used to write "non-zero" and "soft-ware" instead of "nonzero" and "software"; the same trend has occurred for hundreds of other words. Thus it's high time for everybody to stop using the archaic spelling "e-mail". Think of how many keystrokes you will save in your lifetime if you stop now! - Knuth, D.E.

Mas comecemos então já com uma fórmula importantíssima para o percurso que vamos trilhar já de seguida.

Fórmula 6.1 (Igualdade Fundamental da Trigonometria)

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Definição 6.1 (Radiano) *Radiano é o ângulo que determina em qualquer circunferência centrada no seu vértice um arco de comprimento igual ao seu raio.*

Fórmula 6.2 (Graus em Radianos e Vice-Versa) *Apresento então já a proporção para conversão de unidades de ângulos.*

$$\frac{360^o}{2\pi rad} = \frac{\alpha^o}{x rad}$$

Definição 6.2 (Função Periódica) *Diz-se que uma função f, tal que $I = f(t)$, é uma função periódica de período T, sse $f(t+T) = f(t) \forall_{t \in D_f}$.*

Propriedade 6.1 (Seno como Função Real de Variável Real) *Fazemos agora o estudo do Seno como função real de variável real:*

Domínio: *É $\mathbb{R}$ porque a todo o número real α corresponde uma amplitude α (todo o ângulo tem seno).*

Contradomínio: *O seno varia de -1 a 1, logo o contradomínio é $[-1, 1]$.*

Período: *Como os ângulos de α rad e $\alpha + k.2\pi$ rad, $k \in \mathbb{Z}$ têm os mesmos lados origem e extremidade, têm também o mesmo seno. Diz-se que a função seno é periódica e que 2π é o seu período positivo mínimo.*

$$\sin(x + k2\pi) = \sin x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Sinal: *O sinal da função $\sin x$ depende do quadrante onde fica situado o ângulo de $x rad$. O seno é positivo na parte superior do eixo das abcissas (1^o e 2^o quadrantes) e negativo na parte inferior do eixo das abcissas (3^o e 4^o quadrantes).*

Zeros: *Uma vez que o número x corresponde a x radianos, a expressão geral dos zeros de $\sin x$ é $x = k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$.*

Continuidade: *A função seno é contínua em todo o seu domínio.*

Paridade: *Ângulos simétricos têm senos simétricos, ou seja, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \forall_{\alpha \in \mathbb{R}}$, logo a função seno é ímpar.*

Monotonia: *Analisando o círculo trigonométrico verifica-se que o seno cresce em* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *(*1^o *quadrante), decresce em* $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ *(*2^o *e* 3^o *quadrantes) e volta a crescer em* $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$ *(*4^o *quadrante). Como a função é periódica pode-se dizer que cresce em* $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ *e decresce em* $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \frac{3}{2}\pi\right], k \in \mathbb{Z}$

Extremos: *Em* $\mathbb{R}$*, o valor máximo do seno é 1 que é a imagem de* $\frac{\pi}{2}$ *e de qualquer outro número da forma* $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$*. E o valor mínimo é* -1 *que é assumido e,* $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ *com* $k \in \mathbb{Z}$*. Todo o máximo relativo em* $\mathbb{R}$ *é máximo absoluto assim como todo o mínimo relativo em* $\mathbb{R}$ *é mínimo absoluto.*

Limites: *A função seno não tem limite quando* $x \to \pm\infty$.

Assimptotas: *O gráfico, que tem o nome de sinusóide, não admite assimptotas.*

Propriedade 6.2 (Coseno como Função Real de Variável Real) *Fazemos agora o estudo do Coseno como função real de variável real:*

Domínio: *É* $\mathbb{R}$ *porque a todo o número real* α *corresponde uma amplitude* α *(todo o ângulo tem coseno).*

Contradomínio: *O coseno varia de* -1 *a* 1*, logo o contradomínio é* $[-1, 1]$.

Período: *Como os ângulos de* α *rad e* $\alpha + k.2\pi$ *rad,* $k \in \mathbb{Z}$ *têm os mesmos lados origem e extremidade, têm também o mesmo coseno. Diz-se que a função coseno é periódica e que* 2π *é o seu período positivo mínimo.*

$$\cos(x + k2\pi) = \cos x, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Sinal: *O sinal da função* $\cos x$ *depende do quadrante onde fica situado o ângulo de xrad. O coseno é positivo na parte direita do eixo das ordenadas (*1^o *e* 4^o *quadrantes) e negativo na parte esquerda do eixo das ordenadas (*2^o *e* 3^o *quadrantes).*

Zeros: *Uma vez que o número* x *corresponde a* x *radianos, a expressão geral dos zeros de* $\cos x$ *é* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

Continuidade: *A função coseno é contínua em todo o seu domínio.*

Paridade: *Ângulos simétricos têm cosenos iguais, ou seja,* $\cos(-\alpha) = \cos\alpha \quad \forall_{\alpha\in\mathbb{R}}$*, logo a função coseno é par.*

Monotonia: *Analisando o círculo trigonométrico verifica-se que o coseno cresce em* $[2k\pi + \pi; 2k\pi + 2\pi]$ *e decresce em* $[2k\pi; 2k\pi + \pi], \quad k \in \mathbb{Z}$

Extremos: *Em* $\mathbb{R}$*, o valor máximo do coseno é 1 que é a imagem de qualquer número da forma* $2k\pi$*. E o valor mínimo é* -1 *que é assumido e,* $2k\pi + \pi$ *com* $k \in \mathbb{Z}$*. Todo o máximo relativo em* $\mathbb{R}$ *é máximo absoluto assim como todo o mínimo relativo em* $\mathbb{R}$ *é mínimo absoluto.*

Limites: *A função coseno não tem limite quando* $x \to \pm\infty$.

Assimptotas: *O gráfico, que tem o nome de cosinusóide, não admite assimptotas.*

Apesar de eu ter separado por uma questão de organização o estudo de ambas as funções acho aconselhável voltar atrás para verificar o que estas funções não têm em comum para tornar mais fácil a sua memorização dado que assim, após a memorização o tempo de acesso será muito mais rápido do que se tentar visualizar o círculo trigonométrico. Este deverá na minha opinião ser visualizado apenas em caso de dúvida!

Propriedade 6.3 (Tangente como Função Real de Variável Real) *Fazemos agora o estudo da Tangente como função real de variável real:*

Domínio: $D = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, \qquad k \in \mathbb{Z}$

Contradimínio: *A tangente de um ângulo pode tomar qualquer valor de* $-\infty$ *a* $+\infty$*, logo o contradomínio é* $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

Periodicidade: *Tal como se disse para as funções anteriores, os ângulos de* α *rad e* $(\alpha + k2\pi)$ *rad,* $k \in \mathbb{Z}$ *têm o mesmo lado origem e o mesmo lado extremidade logo têm necessariamente a mesma tangente. Assim* 2π *e qualquer dos seus múltiplos são períodos da tangente, mas* ***o período positivo mínimo da tangente*** *é* π*, visto que:*

$$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha \qquad \forall\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Logo, a tangente é função periódica de período π.

Sinal: *A tangente tem sinais iguais em quadrantes opostos. É positiva no* 1^o *e* 3^o *quadrantes e negativa no* 2^o *e no* 4^o.

Zeros: *Uma vez que* $\tan x = tan(xrad)$ *os zeros da tangente são dados por* $x = k\pi$ *com* $k \in \mathbb{Z}$.

Monotonia: *A tangente é* ***crescente em qualquer intervalo do seu domínio***.

Continuidade: *A função tangente é crescente em todo o seu domínio.*

Paridade: *Como ângulos simétricos têm tangentes simétricas vem* $\tan(-x) = -\tan x$ *logo a função tangente é ímpar.*

Extremos: *A função tangente não tem extremos.*

Limites: *Se* x *cresce para* $\frac{\pi}{2}$, $\tan x$ *cresce para* $+\infty$*, se* x *decresce para* $\frac{\pi}{2}$, $\tan x$ *decresce para* $-\infty$.

Assimptotas: *O gráfico da função é um tangentóide e toda a recta vertical de equação* $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$*, é assimptota do gráfico da* $\tan x$.

Fórmula 6.3 (Coseno da Diferença)

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$$

Fórmula 6.4 (Coseno da Soma)

$$\cos(\beta + \alpha) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta.\sin\alpha$$

Fórmula 6.5 (Seno da Diferença)

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$$

Fórmula 6.6 (Seno da Soma)

$$\sin(\beta + \alpha) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha$$

Fórmula 6.7 (Tangente da Diferença)

$$\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha}$$

Fórmula 6.8 (Tangente da Soma)

$$\tan(\beta + \alpha) = \frac{\tan\beta + \tan\alpha}{1 - \tan\beta\tan\alpha}$$

Método 6.1 (Método Sintético de Demonstração de Igualdades) *Parte-se dum dos membros e transforma-se até obter outro.*

Método 6.2 (Método Analítico de Demonstrações de Igualdades) *Transforma-se toda a igualdade dada noutras equivalentes até obter uma obviamente verdadeira.*

Bom, gostaria de só fazer um comentário. Este segundo método é o meu preferido apesar de ser possível que o primeiro seja melhor nalgumas situação mais triviais. Penso que o segundo em geral é melhor porque podemos brincar com os dois ao mesmo tempo e ir simplificando-os o máximo possível. Apesar de aconselhar o segundo, se se achar mais confortável e eficiente com o primeiro, não hesite em usá-lo.

Método 6.3 (Resolução de Equações)

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow x = 2k\pi + \alpha \vee x = 2k\pi + \pi - \alpha \qquad \textit{(em } \mathbb{R}\textit{)}$$

$$\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \qquad \textit{(em } \mathbb{R}\textit{)}$$

$$\tan x = \tan\alpha \Leftrightarrow x = k\pi + \alpha \qquad \textit{(em } \mathbb{R}\textit{)}$$

Teorema 6.1 (Limites do Seno)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$$

Fórmula 6.9 (Derivada do Seno) *Sendo* $u = f(x)$*:*

$$(\sin u)' = \cos u.u'$$

Fórmula 6.10 (Derivada do Coseno) *Sendo* $u = f(x)$*:*

$$(\cos u)' = -\sin u.u'$$

Fórmula 6.11 (Derivada da Tangente) *Sendo* $u = f(x)$*:*

$$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

Antes de terminar, e porque não deixar um problema interessante porque trás algo de engraçado e prático para alguns. Digamos que temos connosco um pequeno GPS (Global Positioning System) que nos dá as coordenadas universais donde nos encontramos no momento. Consideremos por razões de generalização uma posição geral do tipo α graus Norte, β graus Oeste. Agora, dada outra posição γ graus Norte, σ graus Oeste queremos saber qual a distância do local onde estou ao local definido pela outra posição! Como resolver isto? Este problema é bastante simples e a trignometria a utilizar é trivial. Gostaria caso ache complicado resolve-lo deixar-lhe algumas ideias. Considere que uma posição dada por graus para Sul e para Este significam graus negativos para Norte e para Oeste respectivamente para utilizar apenas uma direcção e obviamente vai necessitar do raio da Terra. Agora já disse quase tudo no entanto não deixe de quando tiver tempo achar uma fórmula para resolver esta questão. Pode claro, contactar-me se quiser observar a minha resolução do problema.

7 Números Complexos

The imaginary number is a fine and wonderful recourse of the divine spirit, almost an amphibian between being and not being. - Leibniz, Gottfried Whilhem

Definição 7.1 (Número Complexo) *Número Complexo é todo o ente que pode escrever-se na forma $a + b\mathrm{i}$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{i}^2 = -1$.*

Teorema 7.1 (Igualdade de Números Complexos) *Dois números complexos $a + b\mathrm{i}$ e $c + d\mathrm{i}$ dizem-se iguais se e só se $a = c$ e $b = d$.*

Teorema 7.2 (Adição de Números Complexos)

$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i} \qquad \forall_{a+b\mathrm{i},c+d\mathrm{i}\in\mathbb{C}}$$

Propriedade 7.1 (Comutatividade da Adição de Complexos)

$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (c + d\mathrm{i}) + (a + b\mathrm{i}) \qquad \forall_{a+b\mathrm{i},c+d\mathrm{i}\in\mathbb{C}}$$

Propriedade 7.2 (Associatividade da Adição de Complexos)

$$[(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i})] + (e + f\mathrm{i}) = (a + b\mathrm{i}) + [(c + d\mathrm{i}) + (e + f\mathrm{i})] \qquad \forall_{a+b\mathrm{i},c+d\mathrm{i},e+f\mathrm{i}\in\mathbb{C}}$$

Propriedade 7.3 (Elemento Neutro da Adição de Complexos)

$$(0 + 0\mathrm{i}) + (a + b\mathrm{i}) = (a + b\mathrm{i}) + (0 + 0\mathrm{i}) = a + b\mathrm{i} \qquad \forall_{a+b\mathrm{i}\in\mathbb{C}}$$

Propriedade 7.4 (Elementos Simétricos em Complexos)

$$(a + b\mathrm{i}) + (-a - b\mathrm{i}) = (-a - b\mathrm{i}) + (a + b\mathrm{i}) = 0 + 0\mathrm{i} \qquad \forall_{a+b\mathrm{i}\in\mathbb{C}}$$

Teorema 7.3 (Subtracção de Complexos) *A diferença $(c + d\mathrm{i}) - (a + b\mathrm{i})$ é a soma de $c + d\mathrm{i}$ com o simétrico de $a + b\mathrm{i}$.*

$$(c + d\mathrm{i}) - (a + b\mathrm{i}) = (c - a) + (d - b)\mathrm{i}$$

Teorema 7.4 (Multiplicação de Complexos)

$$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i} \qquad \forall_{a+b\mathrm{i},c+d\mathrm{i}\in\mathbb{C}}$$

Propriedade 7.5 (Comutatividade da Multiplicação de Complexos)

$$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = (c + d\mathrm{i})(a + b\mathrm{i})$$

Propriedade 7.6 (Associatividade da Multiplicação de Complexos)

$$[(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i})](e + f\mathrm{i}) = (a + b\mathrm{i})[(c + d\mathrm{i})(e + f\mathrm{i})] \qquad \forall_{a+b\mathrm{i},c+d\mathrm{i},e+f\mathrm{i}\in\mathbb{C}}$$

Propriedade 7.7 (Elementro Neutro da Multiplicação de Complexos) *Terá de continuar a ser* $1 = 1 + 0\mathrm{i}$*:*

$$(1 + 0\mathrm{i})(a + b\mathrm{i}) = (a + b\mathrm{i})(1 + 0\mathrm{i}) = a + b\mathrm{i} \qquad \forall_{a+b\mathrm{i}\in\mathbb{C}}$$

Propriedade 7.8 (Elemento Inverso em Complexos) *Existe inverso para todo o complexo diferente de zero. O inverso de* $a + b\mathrm{i}$ *é dado por:*

$$\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\mathrm{i}$$

Propriedade 7.9 (Distributividade da Multiplicação de Complexos) *Mostra-se que a multiplicação de Complexos é distributiva em relação á adição.*

$$(a + b\mathrm{i})[(c + d\mathrm{i}) + (e + f\mathrm{i})] = (a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) + (a + b\mathrm{i})(e + f\mathrm{i}) \quad \forall_{a+b\mathrm{i},c+d\mathrm{i},e+f\mathrm{i}\in\mathbb{C}}$$

Teorema 7.5 (Complexos Conjugados) $a+b\mathrm{i}$ *e* $a-b\mathrm{i}$ *dizem-se* ***complexos conjugados****. Têm a mesma parte real e partes imaginárias simétricas.*
Se designarmos um número complexo por z *designarei o seu conjugado por* $\overline{z}$*.*

Propriedade 7.10 (Adição com o Conjugado) *A adição de* $a + b\mathrm{i}$ *com o seu conjugado é* $2a$*.*

Propriedade 7.11 (Multiplicação com o Conjugado) *A multiplicação de* $a + b\mathrm{i}$ *com o seu conjugado é* $a^2 + b^2$

É de notar que tanto a adição tanto como a multiplicação de um complexo pelo seu conjugado resulta sempre num número real.

Teorema 7.6 (Divisão de Complexos)

$$\frac{a + b\mathrm{i}}{c + d\mathrm{i}} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\mathrm{i} \text{ com } c + d\mathrm{i} \neq 0$$

Na prática a divisão é feita multiplicando ambos os termos da fracção pelo conjugado do denominador.

Definição 7.2 (Plano d'Argand) *Um plano munido dum referencial o.n., usado para representar números complexos, chama-se plano d'Argand ou plano complexo.*

A cada número complexo $z = a + b\mathrm{i}$ *corresponde, num referencial o.n. um e só um ponto* $P(a, b)$ *e um e só um vector livre* $\overrightarrow{0P} = (a, b)$ *com* $||\overrightarrow{0P}|| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propriedade 7.12 (Plano d'Argand)

- *A distância de* P *à origem é o módulo de* $z : |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- *Todo o número real* ($b = 0$) *fica representado no eixo das abcissas, por isso chamado eixo real.*
- *Todo o número imaginário puro* ($a = 0, b \neq 0$) *fica no eixo das ordenadas, que é designado, por isso, eixo imaginário.*
- *Números complexos conjugados têm imagens simétricas em relação ao eixo real. Correspondem aos vectores* (a, b) *e* $(a, -b)$.
- *Números complexos simétricos têm imagens simétricas em relação à origem.*

Teorema 7.7 (Produto de Vectores por Unidades Imaginárias) *O produto do vector* $\vec{u}$ *pela unidade imaginária* i *é o vector que se obtém rodando* $\vec{u}$ *de* 90^o *no sentido positivo, logo* $\mathrm{i}\vec{u} \perp \vec{u}$.

Em geral: $(\alpha + \beta\mathrm{i})\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\mathrm{i}\vec{u}$

Teorema 7.8 (Números Imaginários como Medidas) *Dados dois vectores* $\vec{v}$ *e* $\vec{u} \neq 0$, *existe um e só um número complexo* z *tal que* $z\vec{u} = \vec{v}$.
Esse complexo z *é então a medida de* $\vec{v}$ *em relação à unidade* $\vec{u}$.

Definição 7.3 (Módulo de um Complexo) *Módulo do complexo* $z = a + b\mathrm{i}$, *é o número real não negativo* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. *Verifica-se que* $|z| = \sqrt{z.\overline{z}}$.

Definição 7.4 (Argumento) *Argumento do complexo não nulo* z, *que se designa por* $\arg z$ *é qualquer das amplitudes do ângulo orientado definido pelo semieixo real positivo e pelo vector imagem de* z. *Assim sendo:*

$$\arg z = \theta + 2K\pi, \qquad K \in \mathbb{Z}$$

Ao argumento do intervalo $[0, 2\pi[$ *chama-se argumento principal; se for diferente de zero, chama-se também argumento positivo mínimo.*

Teorema 7.9 (Complexo na Forma Trigonométrica) *Seja* $\rho = |z| (z \neq 0)$ *e* θ *um* $\arg z$*:*

$$z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

Esta expressão (designada forma trigonométrica do complexo z*) costuma simplificar-se escrevendo:* $z = \rho \operatorname{cis}\theta$

Fórmula 7.1 (Conjugado na Forma Trigonométrica)

$$\overline{z} = |z| \operatorname{cis}(-\theta)$$

Fórmula 7.2 (Simétrico na Forma Trigonométrica)

$$-z = |z| \operatorname{cis}(\theta + \pi)$$

Fórmula 7.3 (Multiplicação na Forma Trigonométrica)

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

O módulo do produto é o produto dos módulos e o argumento do produto é a soma dos argumentos.

Fórmula 7.4 (Divisão na Forma Trigonométrica)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

O módulo do quociente é o quociente dos módulos e o argumento do quociente é a diferença dos argumentos.

Fórmula 7.5 (Inverso na Forma Trigonométrica)

$$\frac{1}{z} = \frac{1 \operatorname{cis} 0}{1 cis\alpha} = \frac{1}{r} \operatorname{cis}(-\alpha)$$

Portanto, o inverso de z tem módulo inverso e argumento simétrico ao de z. $(z \neq 0)$

Fórmula 7.6 (Fórmula de Moivre)

$$(r \operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

Definição 7.5 (Raiz de Índice n de um Complexo) *Raiz de índice n de $z(n \in \mathbb{N})$ é qualquer complexo z tal que $z^n = w$. Pode escrever-se $z = \sqrt[n]{w}$.*

Fórmula 7.7 (Generalização da Form. de Moivre)

$$z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Teorema 7.10 (Raiz de Um Complexo) *Qualquer número complexo, diferente de 0, tem n raízes de índice n.*

Teorema 7.11 (Módulo da Diferença de Complexos)

$$|z_2 - z_1| = ||\overrightarrow{Z_1 Z_2}|| = \textit{distância de } Z_1 \textit{ a } Z_2$$

8 Conclusão

Termino aqui estas folhas que espero q vejam a contribuir de alguma forma para algo. No entanto, gostaria de fazer notar que novas versões destas folhas estarão na Web, cujo endereço é `http://www.rnl.ist.utl.pt/~pocm` e que sempre que tiverem alguma sugestão ou descobrirem alguma gralha, me contactem por email para `pocm@rnl.ist.utl.pt`. Por último, para aqueles que quiserem criticar, por favor, façam-no de modo construtivo para eu não desperdiçar tempo precioso convosco.

Don't worry too much about your problems with mathematics. I can assure you mine are still greater. - Einstein, A.

But I don't have to know an answer. I don't feel frightned by not knowing things, by being lost in the misterious universe without having any purpose which is the way it really is as far as I can tell, possibly. It doesn't frighten me...- Feynman, Richard P.

9 Listagens

9.1 Definições

9.2 Teoremas

9.3 Fórmulas

9.4 Leis

9.5 Métodos

9.6 Propriedades

9.7 Corolários