Nova School of Business and Economics

Cálculo II

2^o Semestre 2012/2013

Teste Intermédio

Data: 20 de Abril de 2013

Duração: 2 horas + 15 minutos de tolerância

Avisos:

1. O teste é constituído por cinco grupos.
2. Neste enunciado, escreva o seu número e nome e absolutamente mais nada. Entregue-o no fim.
3. Responda ao teste nas folhas de resposta, indicando o grupo a que está a responder. Nunca responda a mais do que um grupo na mesma folha. Não desagrafe nenhuma folha de resposta.
4. Não se esqueça de identificar todas as folhas. Folhas não identificadas não serão corrigidas.
5. Não é permitido o uso de calculadoras. Todos os telemóveis têm que ser desligados.

N^o:

Nome:

---

1. $(3,5$ val.$)$ Considere o seguinte conjunto:

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y > x^2 \wedge y < 2 + x) \vee x = 2\right\}$$

   (a) (1 val.) Represente A geometricamente.

   Observação: As duas alíneas seguintes serão cotadas de acordo com a resposta dada a esta.

   (b) $(1,5$ val.$)$ Determine analiticamente o derivado e a fronteira de A.

   (c) (1 val.) Indique, **justificando**, se A é aberto, conexo por arcos ou limitado.

2. $(6,5$ val.$)$ Considere a seguinte função:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2\left(y-x^2\right)}{x^2+2y^2} + 1 & , \quad y > x^2 \\ \cos\left(y - x^2\right) & , \quad y \leq x^2 \end{cases}$$

   (a) $(1,5$ val.$)$ Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

   (b) (1 val.) Mostre que f é contínua em $\left(a, a^2\right)$, com $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Indique, justificando, o domínio de continuidade de f.

   Observação: Note que não necessita de recorrer à definição de continuidade.

(c) (1 val.) Calcule $f'_y(0,0)$.

Sugestão: Utilize sempre que possível a Regra de Cauchy.

(d) (1, 5 val.) Sabendo que $f'_x(0,0) = 0$, mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

(e) (1, 5 val.) Considere agora a função $h : D_h \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(u) = \ln(u)$. Determine, caso exista, $(h \circ f)'_{(1,1)}(0,0)$.

Sugestão: Utilize sempre que possível a Regra de Cauchy.

3. (4 val.) Considere a seguinte função:

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = \ln(x - 1 + e^y)$$

(a) (0, 5 val.) Justifique que é possível aproximar f através de um polinómio de segundo grau, $P_2(x,y)$, numa vizinhança do ponto $(1,0)$.

(b) (1, 5 val.) Sabendo que $f''_{xx}(1,0) = f''_{yx}(1,0) = -1$, determine $P_2(x,y)$, apresentando os seus cálculos.

(c) (2 val.) **Aproveite o resultado** que encontrou em (b) para indicar, justificando:

i. (1 val.) Uma equação do plano tangente ao gráfico de f em $(1,0,0)$.

ii. (1 val.) O valor, caso exista, de

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{f(x,y) - P_2(x,y)}{\left((x-1)^2 + y^2\right)^{\alpha}}$$

para todo o $\alpha \leq 1$.

4. (4 val.) Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ e homogénea de grau 2, tal que $\nabla f(2,1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$. Seja h a função definida por

$$h(x,y) = f\left(\frac{x^3}{y}, x^2\right)$$

(a) (1 val.) Verifique se h é homogénea e, em caso afirmativo, calcule o seu grau de homogeneidade.

(b) (2 val.) Mostre que $\frac{\partial h}{\partial x}(2,1) = 16$ e $\frac{\partial h}{\partial y}(2,1) = -8$.

(c) (1 val.) Calcule $h(2,1)$, apresentando os seus cálculos.

5. (2 val.) Classifique cada uma das proposições seguintes como verdadeira ou falsa. Se a proposição for verdadeira, prove-o. Se for falsa, justifique-o, apresentando um contra-exemplo.

(a) (1 val.) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ tal que $\exists u \neq 0 : f'_{(u,1)}(1,1) = u - 2$. Então, $\nabla f(1,1) = [1 \ \ -2]$.

(b) (1 val.) Seja $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x \vee (x,y) = (0,0)\right\}$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y \neq x}} f(x,y) = f(0,0)$. Então, f é contínua em $(0,0)$.