Nova School of Business and Economics

Cálculo II

1^o Semestre 2013/2014

Teste Intermédio

Data: 18 de Novembro de 2013

Duração: 2 horas + 15 minutos (tolerância)

Avisos:

1. O teste é constituído por cinco grupos.
2. Neste enunciado, escreva o seu número e nome e absolutamente mais nada. Entregue-o no fim.
3. Responda ao teste nas folhas de resposta, indicando o grupo a que está a responder. Nunca responda a mais do que um grupo na mesma folha. Não desagrafe nenhuma folha de resposta.
4. Não se esqueça de identificar todas as folhas. Folhas não identificadas não serão corrigidas.
5. Não é permitido o uso de calculadoras. Todos os telemóveis têm que ser desligados.

N^o:

Nome:

---

1. $(4,5$ val.; 25 min.) Considere a seguinte função vetorial $\mathbf{f} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por :

$$\mathbf{f}(x,y) = \left(\ln(y - \sin x), \sqrt{\pi^2 - x^2 - y^2}, \frac{1}{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^2 + y^2} \right)$$

   (a) (1 val.) Determine o domínio de $\mathbf{f}$, D, e represente-o graficamente.

   (b) $(1,5$ val.) Indique o **interior**, a **fronteira** e o **derivado** de D.

   (c) (1 val.) Diga, justificando, se D é aberto. E compacto?

   (d) (1 val.) Encontre a expressão geral das curvas de nível da função f_3 e represente graficamente a que contém o ponto $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

2. (5 val.; 25 min.) Considere a seguinte função:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3 \arcsin\left(\sqrt{xy}\right)}{3x^2+y^2} & , \quad 0 < xy \leq 1 \\ 0 & , \quad xy \leq 0 \end{cases}$$

   (a) (1 val.) Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

   Observação: Relembre que $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(.) \leq \frac{\pi}{2}$.

   (b) $(1,5$ val.) Mostre que f é contínua em $(a,0)$ e $(0,b)$, $\forall a,b \neq 0$. Indique, justificando, o domínio de continuidade de f.

   (c) $(0,5$ val.) Calcule $f'_x(0,0)$.

   (d) (1 val.) Sabendo que $f'_y(0,0) = 0$, mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

(e) (1 val.) Considere agora a função $\mathbf{g}(u,v) = (u-v, \ln uv)$. Calcule, se existir, $(f \circ \mathbf{g})'_{(1,1)}(1,1)$. Justifique os cálculos que efetuar.

3. (4,5 val.; 25 min.) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ e homogénea de grau 1. Considere também $g : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$\begin{aligned} g(x,y,z) &= x^2 \exp\left(\frac{y}{z}\right) + f(a,b) \\ \text{com } (a,b) &= \left(xz, \frac{y^3}{z}\right) \end{aligned}$$

(a) (1 val.) Mostre que g é homogénea de grau 2.

(b) (1 val.) Determine $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)$.

(c) (1 val.) Mostre que $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(1,0) = 0$.

(d) (1,5 val.) Sabendo que $\frac{\partial g}{\partial x}(1,0,1) = 3$, encontre $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial z}(1,0,1)$.

4. (5 val.; 25 min.) Considere a função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = e^{x-y}$$

e ainda o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y + z^2 = x^2 + 1 \\ y^2 + \sin x + \sin z = 1 \end{cases}$$

(a) *(*1 val.*)* Determine o subconjunto de pontos de $\mathbb{R}^3$, S, para os quais é possível garantir que o sistema define localmente $x(z)$ e $y(z)$.

Considere agora a função $g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$g(z) = f(x(z), y(z))$$

(b) *(*1,5 val.*)* Verifique que o ponto $(x,y,z) = (0,1,0) \in S$. Determine $\frac{dg}{dz}(0)$.

(c) *(*1,5 val.*)* Mostre que $\frac{d^2 g}{dz^2} = f(x,y)\left[\left(\frac{dx}{dz} - \frac{dy}{dz}\right)^2 + \frac{d^2 x}{dz^2} - \frac{d^2 y}{dz^2}\right]$, na vizinhança do ponto 0.

(d) *(*1 val.*)* Sabendo que $\frac{d^2 x}{dz^2}(0) = \frac{d^2 y}{dz^2}(0) = 0$, determine o desenvolvimento em fórmula de McLaurin de 2ª ordem da função $g(z)$.

5. (1 val.; 20 min.) Considere uma função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $|h(x,y)| \leq |xy|, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que h é diferenciável na origem.