Nova School of Business and Economics

Cálculo II - 2^o Semestre 2013/2014 - Teste Intermédio

João Bravo Furtado/António Bernardo/Diogo Mendes/Ivo Tavares/Patrícia Ramos/Sílvia Guerra

Data: 12 de Abril de 2014

Duração: 1 hora e 45 minutos

Avisos:

1. O teste é constituído por quatro grupos.
2. Neste enunciado, escreva o seu número e nome e absolutamente mais nada. Entregue-o no fim.
3. Responda ao teste nas folhas de resposta, indicando o grupo a que está a responder. Nunca responda a mais do que um grupo na mesma folha. Não desagrafe nenhuma folha de resposta.
4. Não se esqueça de identificar todas as folhas. Folhas não identificadas não serão corrigidas.
5. Não é permitido o uso de calculadoras. Todos os telemóveis têm de ser desligados.

N^o: **Nome:**

---

1. (7 val.) Considere a seguinte função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq 0 \\ \frac{x^4}{x^2+y^2}, \text{ se } x > 0 \end{cases}.$$

   (a) (1,5 val.) Calcule, caso existam, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,a)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,a)$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

   (b) (2 val.) Averigue se f é diferenciável em $(x,y) = (0,a)$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Indique os domínios de continuidade e de diferenciabilidade de f. Justifique.

   (c) (1,5 val.) Calcule o valor máximo da taxa de crescimento de f no ponto $(1,1)$, segundo um vetor de norma igual a 1. Justifique a sua resposta.

   (d) (2 val.) Classifique a proposição seguinte como verdadeira ou falsa, justificando detalhadamente a sua resposta: "f''_{xy} é uma função diferenciável e homogénea de grau 0 em $B_{\frac{1}{2}}(1,1)$.".

2. (5,5 val.) Considere a função escalar w definida por

$$w(x,y) = yf(x^2, 2y)$$

onde f é uma função de classe $C^3(\mathbb{R}^2)$. Sabe-se ainda que $f(1,2) = 1$, $\nabla f(1,2) = [0 \ \ 0]$, e que $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(1,2) = 1$.

   (a) (1,5 val.) Calcule $\nabla w(1,1)$.

(b) (2 val.) Sabendo que $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(1,1) = 0$ e que $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(1,1) = 4$, escreva o polinómio de Taylor de 2^o grau que aproxima w numa vizinhança do ponto $(x,y) = (1,1)$.

(c) (1 val.) Mostre que w não é invertível no seu domínio. Justifique.

(d) (1 val.) Considere agora a função $g(x,y) = (w(x,y), 2x+y)$. Calcule, se existir, a matriz Jacobiana de g^{-1} no ponto $(1,3)$, $J_{g^{-1}}(1,3)$. Justifique.

3. (6 val.) Classifique cada uma das seguintes proposições como verdadeira ou falsa. Justifique as suas respostas de forma sucinta mas **rigorosa**.

(a) $(1,5$ val.) Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$. Sabe-se que o interior de A é o conjunto vazio e que

$$\forall a \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ B_\varepsilon(a) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

Então a fronteira de A é igual ao derivado de A.

(b) $(1,5$ val.) Considere uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Então, é possível que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$ mas que não exista $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y)$.

(c) $(1,5$ val.) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função f tal que $f'_{x-a}(a) = (x_1 - a_1)f'_{x_1}(a) + (x_2 - a_2)f'_{x_2}(a)$, para todo o $x \neq a$. Então f é diferenciável em $x = a$.

(d) $(1,5$ val.) De uma função f de domínio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sabe-se que a sua matriz Jacobiana na origem é $J_f(0,0) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Dado que $J_f(0,0)$ não é uma matriz simétrica, então f não é uma função diferenciável na origem.

4. $(1,5$ val.) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função homogénea de grau α, de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$, e seja $H_f(x,y)$ a matriz Hessiana de f no ponto (x,y). Prove que

$$(\alpha - 1)\nabla f(x,y)^T = H_f(x,y) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

(Observação: $\nabla f(x,y)^T$ denota o vetor gradiente escrito como uma matriz coluna.)

Nova School of Business and Economics
Cálculo II - 2^o Semestre 2013/2014 - Teste Intermédio

João Bravo Furtado/António Bernardo/Diogo Mendes/Ivo Tavares/Patrícia Ramos/Sílvia Guerra

1. (7 val.) Considere a seguinte função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \leq 0 \\ \frac{x^4}{x^2+y^2}, \text{ se } x > 0 \end{cases}.$$

(a) $(1,5$ val.) Calcule, caso existam, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,a)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,a)$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

Res.: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,a)-f(0,a)}{h} = \begin{cases} \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{h^4}{h^2+a^2}}{h} = 0, \text{ se } a \neq 0 \text{ e também é zero se } a = 0, \text{ uma vez que ficamos co} \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} h = 0 \end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,a+h)-f(0,a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$

(b) (2 val.) Averigue se f é diferenciável em $(x,y) = (0,a)$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Indique os domínios de continuidade e de diferenciabilidade de f. Justifique.

Res.: $f(x,y) = r(x,y)$. $\lim_{(x,y)\to(0,a)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} = \begin{cases} \lim_{(x,y)\to(0^-,a)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} \\ \lim_{(x,y)\to(0^+,a)} \frac{x^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+(y-a)^2}} \end{cases}$. Agora, $\left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}\right| \leq \frac{x^2+(y-a)^2}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} = \sqrt{x^2+(y-a)^2} < \varepsilon \leq \delta$. E $\left|\frac{x^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+(y-a)^2}}\right| \leq \frac{x^4}{x^2\sqrt{x^2+(y-a)^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}}$, e a majoração é igual à anterior. O limite existe e é zero, logo f é diferenciável nestes pontos. Nos pontos (x,y) com $x \neq 0$ também é, por ser composição de polinómios. Assim, o domínio de diferenciabilidade (e logo, o de continuidade) é $\mathbb{R}^2$.

(c) $(1,5$ val.) Calcule o valor máximo da taxa de crescimento de f no ponto $(1,1)$, segundo um vetor de norma igual a 1. Justifique a sua resposta.

Res.: O que se pede é $f'_{\frac{\nabla f(1,1)}{\|\nabla f(1,1)\|}}(1,1) = \|\nabla f(1,1)\| = \left\|\left(\frac{4x^3(x^2+y^2)-2x.x^4}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2y.x^4}{(x^2+y^2)^2}\right)_{(1,1)}\right\| = \left\|\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\| = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

(d) (2 val.) Classifique a proposição seguinte como verdadeira ou falsa, justificando detalhadamente a sua resposta: "f''_{xy} é uma função diferenciável e homogénea de grau 0 em $B_{\frac{1}{2}}(1,1)$.".

Res.: $f(x,y) = \frac{x^4}{x^2+y^2}$ é claramente homogénea de grau 2 (faça as contas) em $B_{\frac{1}{2}}(1,1)$, e é de classe C^∞ (divisão de polinómios). Assim, as suas derivadas parciais de 2^a ordem são homogéneas de grau 0 e continuam a ser diferenciáveis. A proposição é verdadeira.

2. $(5,5$ val.) Considere a função escalar w definida por

$$w(x,y) = yf(x^2, 2y)$$

onde f é uma função de classe $C^3(\mathbb{R}^2)$. Sabe-se ainda que $f(1,2) = 1$, $\nabla f(1,2) = [0 \;\; 0]$, e que $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(1,2) = 1$.

(a) $(1,5$ val.) Calcule $\nabla w(1,1)$.

Res.: Seja $u = x^2$ e $v = 2y$. $\frac{\partial w}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy\frac{\partial f}{\partial u}$. Logo, $\frac{\partial w}{\partial x}(1,1) = 2\frac{\partial f}{\partial u}(1,2) = 0$. $\frac{\partial w}{\partial y}(1,1) = 1$ (faça as contas por si).

(b) (2 val.) Sabendo que $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(1,1) = 0$ e que $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(1,1) = 4$, escreva o polinómio de Taylor de 2^o grau que aproxima w numa vizinhança do ponto $(x,y) = (1,1)$.

Res.: Não disponibilizada: venha a um horário de atendimento!

(c) (1 val.) Mostre que w não é invertível no seu domínio. Justifique.

Res.: $w(x,0) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sendo $\mathbb{R}^2$ o domínio de w (porquê?), resulta que w não é injectiva no seu domínio, e logo não é invertível no mesmo.

(d) (1 val.) Considere agora a função $g(x,y) = (w(x,y), 2x+y)$. Calcule, se existir, a matriz Jacobiana de g^{-1} no ponto $(1,3)$, $J_{g^{-1}}(1,3)$. Justifique.

Res.: Tem de justificar que $g(1,1) = (1,3)$, que g é de classe C^1 numa vizinhança de $(1,1)$, e que o jacobiano de g no ponto $(1,1)$ é diferente de zero: repare que, ao contrário do que era pedido na alínea anterior, nesta alínea a forma mais simples de responder é usando o teorema da função inversa, que apresenta apenas condições **suficientes** para se poder concluir o resultado, mas não condições **necessárias**! Posto isto,

$$J_{g^{-1}}(1,3) = [J_g(1,1)]^{-1} = \begin{bmatrix} 0...1 \\ 2...1 \end{bmatrix}^{-1} \text{ (complete os cálculos.)}$$

3. (6 val.) Classifique cada uma das seguintes proposições como verdadeira ou falsa. Justifique as suas respostas de forma sucinta mas **rigorosa**.

(a) $(1,5$ val.) Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^n$. Sabe-se que o interior de A é o conjunto vazio e que

$$\forall a \in A,\, \forall \varepsilon > 0,\, B_\varepsilon(a) \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset.$$

Então a fronteira de A é igual ao derivado de A.

Res.: Verdadeira. A condição acima diz-nos que todos os pontos de A são pontos de acumulação de A. Não havendo pontos isolados e sendo $interior(A) = \varnothing$, $fronteira(A) = \overline{A} = A'$.

(b) $(1,5$ val.) Considere uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Então, é possível que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$ mas que não exista $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y)$.

Res.: Verdadeira. A trajectória $y = x$ pode não pertencer ao domínio da função. Exemplo que satisfaz a condição: $f(x,y) = \frac{xy}{y-x} + 1$.

(c) $(1,5$ val.) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função f tal que $f'_{x-a}(a) = (x_1 - a_1)f'_{x_1}(a) + (x_2 - a_2)f'_{x_2}(a)$, para todo o $x \neq a$. Então f é diferenciável em $x = a$.

Res.: Falso. A implicação é válida no sentido contrário, não neste. Contra-exemplo: $f(x,y) = \begin{cases} 0, & y \neq x^2 \vee (x,y) = (0,0) \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$. Todas as derivadas direcionais são nulas na origem, mas f não é sequer contínua na origem.

(d) $(1,5$ val.) De uma função f de domínio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sabe-se que a sua matriz Jacobiana na origem é $J_f(0,0) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Dado que $J_f(0,0)$ não é uma matriz simétrica, então f não é uma função diferenciável na origem.

Res.: Falso. A função $f(x,y) = (5x+3y, x+2y)$ é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, e a sua matriz jacobiana é a apresentada.

4. $(1,5$ val.) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função homogénea de grau α, de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$, e seja $H_f(x,y)$ a matriz Hessiana de f no ponto (x,y). Prove que

$$(\alpha-1)\nabla f(x,y)^T = H_f(x,y) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

(Observação: $\nabla f(x,y)^T$ denota o vetor gradiente escrito como uma matriz coluna.)

Res.: Como f é de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$, e homogénea de grau α, as suas derivadas parciais são diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$ e homogéneas de grau $\alpha - 1$, pelo que verificam a identidade de Euler:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha-1)\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ (\alpha-1)\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{array} \right. \Leftrightarrow (\alpha-1)\nabla f(x,y)^T = H_f(x,y) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$