Nova School of Business and Economics
Cálculo II
1^o Semestre 2012/2013
Teste Intermédio

Data: 5 de Novembro de 2012
Duração: 1 hora e 45 minutos
Avisos:

1. O teste é constituído por cinco grupos.
2. Neste enunciado, escreva o seu número e nome e absolutamente mais nada. Entregue-o no fim.
3. Responda ao teste nas folhas de resposta, indicando o grupo a que está a responder. Nunca responda a mais do que um grupo na mesma folha. Não desagrafe nenhuma folha de resposta.
4. Não se esqueça de identificar todas as folhas. Folhas não identificadas não serão corrigidas.
5. Não é permitido o uso de calculadoras. Todos os telemóveis têm que ser desligados.

N^o:

Nome:

---

1. Considere a seguinte função:

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y)) = \left(\sqrt{y - x^2 + 4}, \sqrt{xy}, \ln\left(\frac{2-x-y}{x^2+y^2}\right)\right)$$

   (a) $(1,5$ val.) Determine analiticamente o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

   Observação: As duas alíneas seguintes serão cotadas de acordo com a resposta dada a esta.

   (b) $(1,25$ val.) Determine analiticamente o interior e fronteira de D_f.

   (c) $(1,25$ val.) Indique, justificando, se D_f é um conjunto fechado e limitado.

2. Considere a seguinte função:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + (x-1)y\frac{\sin(x-1)}{(x-1)^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (1,0) \\ 1 & , \quad (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

   (a) (2 val.) Mostre que f é contínua em $(1,0)$. Será f contínua em $\mathbb{R}^2$? Justifique a sua resposta.

   Observação: Lembre-se que $|\sin(a)| \leq |a|$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

   (b) (1 val.) Calcule $\nabla f(1,0)$.

   (c) (2 val.) Mostre que f não é diferenciável em $(1,0)$.

3. Considere a seguinte função:

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f\left(x,y\right) = \ln\left(x^2 + y + 1\right)$$

   (a) (2 val.) Calcule o polinómio de Taylor de 2^a ordem, $P_2(x,y)$, que aproxima a função f numa vizinhança do ponto $(0,0)$.

   (b) (2 val.) Calcule, justificando:.

      i. (1 val.) Um valor aproximado de f no ponto $(0,1;0,1)$.

      ii. (1 val.) A **derivada dirigida** da função $3f$, segundo a **direção e sentido de decrescimento máximo** de f, no ponto $(0,0)$.

4. Considere a seguinte função:

$$f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$f\left(x,y\right) = \left(\ln\left(xy\right), x^2 y\right)$$

   (a) (3,5 val.) Sabendo que $g : D_g \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 e homogénea de grau 2, $g'_a\left(0,1\right) = 0$, $g'_b\left(0,1\right) = g''_{aa}\left(0,1\right) = g''_{bb}\left(0,1\right) = 2$ e $h = g \circ f$, mostre que:

      i. (1,5 val.) $h'_x(1,1) = 4$.

      ii. (2 val.) $h''_{xy}\left(1,1\right) = 10$.

   (b) (1 val.) Encontre a expressão geral de uma função $m : D_m \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $J_{f\circ m}\left(u,v\right) = I_{2\times 2}$ (matriz identidade 2×2).

5. Indique se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. No caso de serem verdadeiras, justifique-o apropriadamente. Caso sejam falsas, prove-o com um contra-exemplo.

   (a) (1,25 val.) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1. O jacobiano de f em x_0 ser diferente de zero, i.e., $|J_f(x_0)| \neq 0$, é uma condição necessária mas não suficiente para assegurar a invertibilidade de f numa vizinhança do ponto x_0.

   (b) (1,25 val.) Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função cuja expressão geral é $g(x,y) = (ax + by, cx + dy)$, ou seja, g é uma função linear. Se $ad - bc \neq 0$, então g é localmente invertível em $\mathbb{R}^2$.