Nova School of Business and Economics

Cálculo II

1^{o} Semestre 2012/2013

Exame Época Normal

Data: 8 de Janeiro de 2013
Duração: 2 horas e 30 minutos
Avisos:

1. O exame é constituído por cinco grupos.
2. Neste enunciado, escreva o seu número e nome e absolutamente mais nada. Entregue-o no fim.
3. Responda ao exame nas folhas de resposta, indicando o grupo a que está a responder. Nunca responda a mais do que um grupo na mesma folha. Não desagrafe nenhuma folha de resposta.
4. Não se esqueça de identificar todas as folhas. Folhas não identificadas não serão corrigidas.
5. Não é permitido o uso de calculadoras. Todos os telemóveis têm que ser desligados.

N^{o}:

Nome:

---

1. (5 val.; Tempo indicativo: 30 min.) Considere a seguinte função:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 - x^2y^2}{x^2+|y|} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) $(0,5$ val.) Mostre que f é contínua nos pontos da forma $(a,0)$, com $a \neq 0$, ou seja, nos pontos do eixo xx diferentes da origem.

   (b) $(1,5$ val.) Mostre que f é contínua em $(0,0)$. Indique, justificando, o domínio de continuidade de f.

   (c) $(0,75$ val.) Calcule $f'_x(a,0)$, com $a \in \mathbb{R}$.

   (d) $(1,25$ val.) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

   (e) (1 val.) Mostre que $\nexists f'_y(a,0)$, com $a \neq 0$. O que pode dizer quanto à diferenciabilidade de f nestes pontos? Justifique.

2. $(3,5$ val.; 20 min.) Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^2, com $\nabla f(0,1) = (0,1)$. Seja g a função definida por $g(u,v) = f\left(u, u^2+v^2+1\right)$.

   (a) (2 val.) Mostre que $\nabla g(0,0) = (0,0)$.

   (b) $(1,5$ val.) Sabendo que $g''_{uu}(0,0) = 2$ e $g''_{uv}(0,0) = 0$, mostre que $(0,0)$ é um minimizante local de g. Justifique a sua resposta.

3. (4 val.; 25 min.) Considere uma função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de classe C^2 e homogénea de grau 2. Sabe-se que $F(3,0,3) = 0$, $F'_x(1,0,1) = 2$ e $F''_{yx}(1,0,1) = F''_{yz}(1,0,1) = 0$.

   (a) (1,5 val.) Mostre que $F(1,0,1) = 0$ e $\nabla F(1,0,1) = (2,0,-2)$.

   (b) (0,75 val.) Mostre que a equação $F(x,y,z) = 0$ permite definir implicitamente z como uma função $g(x,y)$, numa vizinhança de $(1,0,1)$.

   (c) (1,75 val.) Sabendo que $g''_{yy}(1,0) = -1$, mostre que a função $h : D_h \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $h(x,y) = \left(g(x,y), -g'_y(x,y)\right)$ é localmente invertível em $(1,0)$.

   Sugestão: Vai necessitar da **expressão** de g'_y (ou g'_x) num ponto genérico (x,y) para calcular $g''_{yx}(1,0)$.

4. (6 val.; 30 min.) O gerente de um novo restaurante de cozinha alentejana pretende **maximizar o lucro** da principal aposta culinária do restaurante: migas de espargos com porco preto, como estratégia de sustentabilidade do negócio face às dificuldades impostas pelo IVA atualmente em vigor no setor da restauração. Admita que a **função lucro**, **por dose** confecionada desta especialidade, é dada por $\Pi(x,y) = p(x+y) - x - py^2$ (u.m.), com $p > 0$, onde x é a quantidade de **porco preto** servida em cada dose (em kg), e y é a correspondente quantidade de **espargos** utilizados em cada dose (em kg). De forma a servir doses cuja abundância garanta a satisfação dos seus clientes, o gerente tem que assegurar que cada dose conterá, **pelo menos**, $0,25$ kg de **porco preto**. Por outro lado, para assegurar o equilíbrio de sabores da receita, **a quantidade de espargos utilizada em cada dose terá de ser exactamente metade da correspondente quantidade de porco preto**.

   (a) (1 val.) Formule o problema do gerente, identificando claramente a função objetivo, as variáveis de decisão e as restrições do problema.

   (b) (1,5 val.) Escreva as condições de Kuhn-Tucker associadas ao problema do gerente.

   (c) (2 val.) Admita que $p = 0,75$. Sabe-se que, em qualquer otimizante do problema, a quantidade de porco preto servida em cada dose **é superior a** $0,25$ **kg**. Encontre um ponto que satisfaça as condições de Kuhn-Tucker e que verifique esta condição. Justifique que o ponto que encontrou é **otimizante global** do problema (**Nota**: Pode evitar quaisquer cálculos adicionais, lembrando-se que a soma de funções côncavas é também uma função côncava).

   (d) (1,5 val.) Suponha agora que o gerente tem a possibilidade de aumentar ligeiramente o valor de p. Aconselhá-lo-ia a fazê-lo? Justifique **quantitativamente** a sua resposta.

5. (1,5 val.; 15 min.) Considere uma função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, de classe C^1, e homogénea de grau α. Sabe-se que $F(\mathbf{a}) = 0$ e $F'_{x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$. Justifique que x_n pode ser escrita como uma função $f(x_1, ..., x_{n-1})$, numa vizinhança de $\mathbf{a}$, e **prove** que, nessa vizinhança, f é homogénea de grau 1.

   Observação: Note que se as derivadas parciais de uma função diferenciável forem homogéneas de grau β, não pode garantir que a função seja homogénea de grau $\beta + 1$.