Nova School of Business and Economics

Cálculo II - 2^o Semestre 2013/2014 - Exame de Época Normal

João Bravo Furtado/António Bernardo/Diogo Mendes/Ivo Tavares/Patrícia Ramos/Sílvia Guerra

Data: 2 de Junho de 2014

Duração: 2 horas e 30 minutos

Avisos:

1. Neste enunciado, escreva o seu número e nome e absolutamente mais nada. Entregue-o no fim.
2. Responda ao teste nas folhas de resposta, indicando o grupo a que está a responder. Nunca responda a mais do que um grupo na mesma folha. Não desagrafe nenhuma folha de resposta.
3. Não se esqueça de identificar todas as folhas. Folhas não identificadas não serão corrigidas.
4. Não é permitido o uso de calculadoras. Todos os telemóveis têm de ser desligados.

N^o: **Nome:**

---

1. (6 val.) Considere a seguinte função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-y)^4}{x^2+y^2}, \text{ se } y > x \\ \sin\left((x-y)^2\right), \text{ se } y \leq x \end{cases}$$

   (a) (1,5 val.) Estude a continuidade de f para $(x,y) = (a,a)$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Justifique.
   (Sugestão: Estude separadamente o caso $a = 0$.)

   (b) (1 val.) Determine, justificando, o contradomínio de f.

   (c) (1,5 val.) Calcule, caso exista, $\nabla f(a,a)$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Justifique

   (d) (2 val.) Estude a diferenciabilidade de f para $(x,y) = (a,a)$, para todo $a \in \mathbb{R}$. Justifique.
   (Observação: Se necessitar, lembre-se que $|\sin x| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.)

2. (4 val.) Admita que a equação $g(x,y,z) = 0$ permite definir z como uma função $f(x,y)$ numa vizinhança do ponto $(1,1)$ e que o ponto $(1,1)$ é um ponto de estacionariedade de f. Admita ainda que $f(1,1) = 0$, que ambas as funções f e g são de classe C^2 nos seus domínios, e que $\frac{\partial g}{\partial z}(1,1,0) < 0$.

   (a) (1 val.) Mostre que $\nabla f(1,1) = -\frac{1}{\frac{\partial g}{\partial z}(1,1,0)} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(1,1,0) & \frac{\partial g}{\partial y}(1,1,0) \end{bmatrix}$ e justifique que $\nabla f(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (b) (2 val.) Mostre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = -\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,1,0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(1,1,0)}$.

   (c) (1 val.) Sabendo que a matriz hessiana de f no ponto $(1,1)$ é

$$H_f(1,1) = -\frac{1}{\frac{\partial g}{\partial z}(1,1,0)} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1,0) & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1,1,0) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(1,1,0) & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,1,0) \end{bmatrix},$$

   determine condições, em termos das derivadas parciais de segunda ordem da função g, que garantam que o ponto $(1,1)$ é um minimizante local de f.

3. (3 val.) Classifique cada uma das seguintes proposições como verdadeira ou falsa. Justifique as suas respostas de forma **rigorosa**.

   (a) (2 val.) Seja $g(x, y) = f(u, v) = f(x^2y, e^x)$, f uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$, e tal que $\frac{\partial f}{\partial u}(2, e) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(2, e) = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(2, e) = 1$. Então, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(1, 2) = 6 + e$.

   (b) (1 val.) Seja f uma função escalar que satisfaz $\alpha f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}).\mathbf{x}$, para todo $\mathbf{x}$ no domínio de f. Então, f é diferenciável e homogénea de grau α.

4. (5 val.) Um estudante tem 60 dias de férias escolares e decidiu trabalhar em parte deles. O estudante pretende maximizar a sua utilidade, dada por $U(x, L) = \ln x + 2 \ln L$, onde x representa a quantidade de um determinado bem de consumo, e L representa o número de dias de lazer que o estudante terá: o estudante irá por isso trabalhar $(60 - L)$ dias.

   O salário diário que o estudante vai receber é $w = 50$ euros, e cada unidade do bem x tem o preço de $p_x = 1$ euro (o que restringe a quantidade do bem de consumo que o estudante poderá comprar). Por outro lado, o estudante decidiu que quer ter pelo menos 20 dias de férias/lazer (note que não precisa de impor $L \leq 60$).

   (a) (1, 5 val.) Formalize o problema do estudante e escreva as condições de Kuhn-Tucker associadas.

   (b) (1 val.) Mostre que $L \neq 20$ em qualquer ponto que satisfaça as condições de Kuhn-Tucker.

   (Sugestão: Repare no domínio da função objetivo.)

   (c) (1, 5 val.) Encontre um ponto $(x^*, L^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)$ que seja solução das condições de Kuhn-Tucker. Justifique que esse ponto é único e que $U(x^*, L^*)$ é o máximo global estrito do problema.

   (d) (1 val.) Suponha que o preço unitário do bem de consumo descia para $p_x = 0, 9$ euros. Calcule a variação aproximada que essa descida de preço provocaria na utilidade óptima do estudante.

5. (2 val.) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$ e seja $\mathbf{x}^*$ um ponto de estacionariedade de f. Prove que se o diferencial de segunda ordem de f for definido positivo em $\mathbf{x}^*$, isto é, $\mathbf{u}^T H_f(\mathbf{x}^*)\mathbf{u} > 0$, $\forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, então f tem um mínimo local estrito em $\mathbf{x}^*$.

Exame 2/06/2014

1\. a) $$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,a)\\ y>x}} \frac{(x-y)^4}{x^2+y^2} = \frac{0}{2a^2} = 0,\quad a \neq 0.$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,a)\\ y\le x}} \operatorname{sen}(x-y)^2 = \operatorname{sen} 0 = 0 = f(a,a),\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

• $a = 0$ → $$\left|\frac{(x-y)^4}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{|x-y|^4}{x^2+y^2} \le \frac{(|x|+|y|)^4}{x^2+y^2} \le \frac{2^4\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^2} =$$

$$= 16\,\|(x,y)\|^2 < 16\,\varepsilon^2 \le \delta \Rightarrow \varepsilon \le \frac{\sqrt{\delta}}{4}.$$

Logo, f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

b) $$\lim_{\substack{y\to+\infty\\ x=0}} \frac{(x-y)^4}{x^2+y^2} = \lim_{y\to+\infty} y^2 = +\infty;$$ por outro lado, o valor mais baixo que f toma é -1, por exemplo num ponto em que $y=0$ e $\operatorname{sen} x^2 = -1$, como em $x^2 = \frac{3}{2}\pi$ ou $x = \sqrt{\frac{3}{2}\pi}$. Sendo f contínua, o seu contradomínio é $[-1, +\infty[$.

c) $$\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,a)-f(a,a)}{h} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{(a+h-a)^4}{h\left((a+h)^2+a^2\right)} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^3}{(a+h)^2+a^2} \\ \displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(a+h-a)^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} h^2}{h} \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0,\ \forall a \in \mathbb{R} \\ \displaystyle\lim_{h\to 0^+} h \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen} h^2}{h^2}\right)}_{\to 1} = 0 \end{cases}$$; por simetria na troca de variáveis,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,a) = 0 \quad \text{e} \quad Df(a,a) = [0,0],\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

d) $f(x,y) = r(x,y)$; $$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \frac{r(x,y)}{\|(x,y)-(a,a)\|} = \lim_{(x,y)\to(a,a)} \begin{cases} \dfrac{(x-y)^4}{(x^2+y^2)\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}}, & y > x \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen}(x-y)^2}{\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}}, & y \le x \end{cases}.$$

• Para $a \neq 0$,

$$\frac{1}{2a^2}\left|\frac{(x-y)^4}{\|(x,y)-(a,a)\|}\right| \le \frac{1}{2a^2}\,\frac{\left(|x-a|+|y-a|\right)^4}{\|(x,y)-(a,a)\|} \le \frac{1}{2a^2}\,\frac{2^4\,\|(x,y)-(a,a)\|^4}{\|(x,y)-(a,a)\|} \xrightarrow[(x,y)\to(a,a)]{} 0$$

e

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(x-y)^2}{\|(x,y)-(a,a)\|}\right| \le \frac{|x-y|^2}{\|(x,y)-(a,a)\|} = \frac{|(x-a)-(y-a)|^2}{\|(x,y)-(a,a)\|} \le \frac{2\,\|(x,y)-(a,a)\|^2}{\|(x,y)-(a,a)\|} \xrightarrow[(x,y)\to(a,a)]{} 0$$

$\forall a \in \mathbb{R}$.

Resta ver que, para $a=0$,

$$\left|\frac{(x-y)^4}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq 2^4\frac{\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^3} = 2^4\|(x,y)\| < 16\,\varepsilon \leq \delta \Rightarrow \varepsilon \leq \frac{\delta}{16}.$$

(Alternativamente, $2^4\|(x,y)\| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$. Assim, f é dif. em $\mathbb{R}^2$.

2.a) $\nabla f(1,1)=[0,0]$ porque $(1,1)$ é ponto de estacionaridade de f (e f é dif.).

Agora, $\nabla f(1,1) = \left[\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,1)\right] = -\left[\frac{\partial g}{\partial z}(1,1,0)\right]^{-1}\left[\frac{\partial g}{\partial x}(1,1,0) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1,1,0)\right] =$

$$= -\frac{1}{\frac{\partial g}{\partial z}(1,1,0)}\left[\frac{\partial g}{\partial x}(1,1,0) \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1,1,0)\right].$$

b) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}}\right] = -\left(\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}}{\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}\right).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,1) = -\left.\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}}{\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}\right|_{(1,1,0)} = -\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(1,1,0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(1,1,0)},$$ uma vez que $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1,0)=0$.

c) Se $Hf(1,1)$ for definida positiva, $(1,1)$ é um minimizante local de f.

Para isso basta que $|H_1| = -\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1,0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(1,1,0)} > 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1,0) > 0}$ e

e $|H_2| = |Hf(1,1)| > 0 \Leftrightarrow \left.\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right|_{(1,1,0)} > 0$.

3.a) $g \equiv f < \begin{matrix} u \\ v \end{matrix}$ $\begin{matrix} < \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \\ - x \end{matrix}$ $\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2xy + \frac{\partial f}{\partial v}e^x \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} =$

$$= 2x\frac{\partial f}{\partial u} + 2xy\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}\right] + e^x\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(1,2) =$$

$$= 2\frac{\partial f}{\partial u}(2,e) + \cancel{2}\,2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(2,e)\cdot[x^2]_{x=1} + e\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}(2,e)\cdot[x^2]_{x=1} =$$

$= 2+4+e = 6+e. \to$ Verdadeira!

b) Falsa. $\alpha f(x) = \nabla f(x)\cdot x$ e $\underline{f \text{ dif.}}$ $\Rightarrow f$ homogénea de grau α; ou então, alternativamente, a implicação é válida no sentido contrário. Mas não basta f verificar a identidade de Euler para ser homogénea, é preciso que seja diferenciável também.

4.a) $\max\limits_{x,L} \ \ln x + 2\ln L$

$$\text{s.a.} \begin{cases} p_x x \leq 50(60-L) \\ L \geq 20 \\ x, L \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \max_{x,L} \ \ln x + 2\ln L \quad \text{s.a.} \begin{cases} x + 50L \leq 3000 \\ -L \leq -20 \\ x, L \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = \ln x + 2\ln L + \lambda_1(3000 - p_x x - 50L) + \lambda_2(-20 + L)$$

Condições KT:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{x} - \lambda_1 \leq 0 \wedge x \geq 0 \wedge x\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial L} = \frac{2}{L} - 50\lambda_1 + \lambda_2 \leq 0 \wedge L \geq 0 \wedge L\frac{\partial L}{\partial L} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 3000 - x - 50L \geq 0 \wedge \lambda_1 \geq 0 \wedge \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -20 + L \geq 0 \wedge \lambda_2 \geq 0 \wedge \lambda_2 \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0$$

b) Do domínio de U, $x > 0 \wedge L > 0$.

Assim, $\lambda_1 = \frac{1}{x} \geq 0$

$\frac{2}{L} - 50\lambda_1 + \lambda_2 = 0$; Suponha-se que $L = 20$.

$3000 - x - 50L = 0$

Então, $x = 3000 - 50 \times 20 = 2000 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{x} = \frac{1}{2000} \Rightarrow \lambda_2 = 50\lambda_1 - \frac{2}{L} =$

$= \frac{50}{2000} - \frac{2}{20} = \frac{1}{40} - \frac{1}{10} = \frac{10-40}{400} = -\frac{3}{40} < 0$, o que é impossível!

c) Sabendo que $L > 20$, tira-se da última condição de KT que $\lambda_2^* = 0$.

Logo, $\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{x} \\ \frac{2}{L} - 50\lambda_1 = 0 \\ 3000 - x - 50L = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{50L} = \frac{1}{25L} \Rightarrow x = 25L$

$\Rightarrow 3000 - 25L - 50L = 0 \Rightarrow L^* = \frac{3000}{75} = 40$

$x^* = 25 \times 40 = 1000$ e $\lambda_1^* = \frac{1}{1000}$

$(x^*, L^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*) = \left(1000, 40, \frac{1}{1000}, 0\right) \rightarrow$ o ponto é único porque é a solução possível e determinada de um sistema de equações lineares. Agora, U é estritamente côncava porque é a soma de duas funções estritamente côncavas, e é diferenciável. As restrições são lineares, logo convexas e diferenciáveis. Assim, pelo Teorema da suficiência, o ponto encontrado é solução do problema e $U(x^*, L^*)$ é o máximo global estrito.

d) $\frac{\partial U^*}{\partial p_x} = \frac{\partial L^*}{\partial p_x} = -\lambda_1^* x^* \Rightarrow \Delta U^* \simeq -\lambda_1^* x^* \Delta p_x = -\frac{1}{1000} \times 1000 \times (-0{,}1) = 0{,}1.$

5. Ver livro de texto!