2013/2014 - 1º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
30 de Novembro de 2013

Grupo 1

1- Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -6 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1.1- Verifique que $rank(bb^T) = 1$. Será que o resultado se mantem para um vector $b \in \Re^n$ arbitrário mas diferente do vector nulo? Justifique.[2/20]

1.2- Qual a dimensão do espaço das colunas de A?[2/20]

1.3- Indique uma base do espaço nulo de A. [2/20]

1.4- Verifique se b pertence ao espaço das colunas de A.[2/20]

1.5- Classifique o sistema $Ax = b$. Justifique. [2/20]

Respostas

1.1- Temos $bb^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 12 & 2 \\ 12 & 36 & 6 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

$$rank \begin{bmatrix} 4 & 12 & 2 \\ 12 & 36 & 6 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} 4 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

Repare que, em geral para $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \Re^n$, bb^T é uma matriz $(n \times n)$ cuja primeira linnha é o vector $b_1 b$, a seguda linha contem $b_2 b$, ..., e a n-ésima linha contem $b_n b$. Logo teremos sempre $rank(bb^T) = 1$ se $b \neq 0^n$.

1.2- Basta calcular $rank(A)$:

$$rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -6 & 2 \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

1.3- Repare que o sistema homogenio reduzido ficaria $\begin{matrix} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = x_3 \end{matrix}$. Este sistema tem uma variável livre o que corresponde à dimensão do espaço nulo de A que é $n - rank(A) = 1$. Logo uma base é $(-2, 1, 1)$.

1.4- Basta calcular o rank da matriz aumentada.

$$rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ -2 & -6 & 2 & 1 \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -6 & 6 & 5 \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 41 \end{bmatrix} = 3$$

Logo o *rank* da matriz aumentada (3) é superior ao *rank* de A o que significa que b não pertence ao espaço das colunas de A.

1.5- Da alinea anterior conclui-se imediatamente que o sistema é impossível.

2013/2014 - 1º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
30 de Novembro de 2013

Grupo 2

2- Considere de novo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -6 & 2 \end{bmatrix}$.

2.1- Calcule os valores próprios de A. [2/20]

2.2- Calcule os vectores próprios de A. [2/20]

2.3- A matriz é diagonalizável? Se sim exiba a matriz diagonalizadora. [2/20]

Respostas

2.1- Formamos o polinómio caracteristico

$$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & -6 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda)-6]+4(1-\lambda) =$$

$(1-\lambda)[(1-\lambda)(2-\lambda)-2] = 0$. As raizes deste polinómio são $0, 1, 3$.

2.2-

Calculemos os vectores próprios:

Para $\lambda = 0$ o sistema homogénio vem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A primeira equação diz que $x_1 = -2x_3$

A segunda equação diz que $x_2 = x_3$

Logo a terceira equação vem $4x_3 - 6x_3 + 2x_3 = 0$ é redundante. Os vectores próprios têm a forma $(-2a, a, a)$ com a real arbitrário.

Para $\lambda = 1$ o sistema homogénio vem:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A primeira equação diz que $x_3 = 0$

A segunda equação é redundante.

Logo a terceira equação vem $-2x_1 - 6x_2 = 0$ é redundante. Os vectores próprios têm a forma $(-3b, b, 0)$ com b real arbitrário.

Para $\lambda = 3$ o sistema homogénio vem:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A primeira equação diz que $x_1 = x_3$

A segunda equação diz que $x_2 = -\frac{1}{2}x_3$

Logo a terceira equação vem $-2x_3 + 3x_3 - x_1 = x_3 = 0$ é redundante. Os vectores próprios têm a forma $(c, -\frac{c}{2}, c)$ com c real arbitrário.

2.3- A matriz é diagonalizável pois tem valores próprios distintos e, portanto, vectores próprios independentes. Uma matriz diagonalizadora é $B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Com efeito temos:

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2013/2014 - 1º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
30 de Novembro de 2013

Grupo 3

3- Para cada inteiro n considere a matriz $A_n = \begin{bmatrix} 1-n & -n \\ n & 1+n \end{bmatrix}$.

3.1- Mostre que se tem $A_n A_m = A_{n+m}$. [2/20]

3.2- Aproveite o resultado anterior para mostrar que $(A_n)^{-1} = A_{-n}$.[2/20]

Respostas

3.1- $A_n A_m = \begin{bmatrix} 1-n & -n \\ n & 1+n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-m & -m \\ m & 1+m \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} (m-1)(n-1)-mn & m(n-1)-n(m+1) \\ m(n+1)-n(m-1) & (m+1)(n+1)-mn \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1-(n+m) & -(n+m) \\ n+m & 1+(n+m) \end{bmatrix} = A_{n+m}$$

3.2- Repare que $A_0 = I_2$. Logo, da alinea anterior vem $A_n A_{-n} = A_{-n} A_n = A_0 = I_2$ o que mostra que $(A_n)^{-1} = A_{-n}$.