2013/2014 - 2º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
17 de Maio de 2014
Grupo 1

1- Sabe-se que um sistema de equações lineares $Ax = b$ tem a seguinte solução geral:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ com } \lambda_1 \in \Re \text{ e } \lambda_2 \in \Re$$

Sabendo que a primeira coluna de A é $A^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e que $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ determine a matriz A.[5/20]

Resposta

1- Da solução geral concluimos que A tem 4 colunas e observando A^1 verificamos que A é (3×4), $A = \begin{bmatrix} A^1 & A^2 & A^3 & A^4 \end{bmatrix}$, onde $A^1 \quad A^2 \quad A^3 \quad A^4$ designam as colunas de A.

Por outro lado sabemos que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ é solução de $Ax = b$ enquanto $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ são soluções do sistema homogéneo $Ax = 0$. Logo teremos:

$A^1 + 2A^3 = b, \quad -3A^1 + A^2 = 0 \quad \text{e}\ A^1 - A^3 + A^4 = 0.$

Da primeira igualdade vem $A^3 = \frac{1}{2}(b - A^1) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

Da segunda igualdade vem $A^2 = 3A^1 = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

Da terceira igualdade concluimos que $A^4 = A^3 - A^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

Logo temos $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -2 & -4 \end{bmatrix}$.

2013/2014 - 2º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
17 de Maio de 2014

Grupo 2

2- Considere a matriz A e o vector x em baixo.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.**1**- Mostre que x é um vector próprio de A e encontre o respectivo valor próprio. [2/20]

2.**2**- Calcule os outros valores póprios de A. [2/20]

2.**3**- Se possivel determine uma matriz B tal que $B^{-1}AB = D$ onde D designa a matriz diaginal dos valores próprios de A. Se tal não for possivel diga porquê. [2/20]

Resposta

2.**1**- Repare que $Ax = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2x$ logo x é um vector próprio associado ao valor próprio $\lambda_1 = 2$.

2.**2**- Se designarmos por λ_2 e λ_3 os outros valores próprios de A sabemos que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr(A)$ e que $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det(A)$. Ora $tr(A) = -1 + 2 + 1 = 2$ e

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} = -2$$

Assim teremos $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ e $\lambda_2\lambda_3 = -1$ então $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$.

2.**3**- Como os valores próprios são distintos sabemos que existe uma base de vectores próprios. Para a encontrar temos que resolver os seguintes sistemas homogéneos:

Para $\lambda_1 = 2$ sabemos que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vector próprio.

Para $\lambda_1 = 1$ vem :

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -6 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a ultima equação diz que $y = 0$ e este facto e a primeira dizem que $x = z$ logo um vector próprio é $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Para $\lambda_1 = -1$ vem :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -6 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a primeira equação diz que $y = -2z$ e este facto e a segunda dizem que $x = 0$ logo um vector próprio é $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Assim teremos $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2013/2014 - 2º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
17 de Maio de 2014

Grupo 3

3- Seja A uma matriz real $(n \times n)$. Seja agora v um um vector próprio de A associado ao valor próprio λ e seja w um vector próprio de A^T associado ao valor próprio α.

Mostre que se $\lambda \neq \alpha$ então v e w são ortogonais. (Sugestão: lembre-se de um resultado parecido sobre matrizes simétricas.) [4/20]

Resposta

3- Sabemos que $Av = \lambda v$ e que $A^T w = \alpha w$. Multiplicando a primeira igualdade, à esquerda, por w^T obtemos $w^T A v = \lambda w^T v$.

Agora multiplicando a segunda igualdade, à esquerda, por v^T obtemos $v^T A^T w = \alpha v^T w$. Repare que $w^T v = v^T w = < v, w >$. Então teremos as igualdades $w^T A v = \lambda < v, w >$ e $v^T A^T w = \alpha < v, w >$. Os primeiros membros destas igualdades são matrizes (1×1) logo $w^T A v = (w^T A v)^T = v^T A^T w$, ou seja os primeiros membros são iguais. Assim, se subtrairmos membro a membro as igualdades obtemos $0 = (\lambda - \alpha) < v, w >$. Como $\lambda \neq \alpha$ isto implica $< v, w >= 0$.

2013/2014 - 2º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
17 de Maio de 2014

Grupo 4

4- Seja $\mathcal{B} = \{u^1, u^2, u^3\}$ uma base de $\Re^3$ e considere $T : \Re^3 \to \Re^3$ uma transformação linear definida por $T(u^1) = u^1, T(u^2) = u^2, T(u^3) = 3u^1 - u^2$.

4.1- Determine a matriz que representa a transformação T na base $\mathcal{B}$ e o respectivo nucleo.[2/20]

4.2- Determine os vectores cuja direcção não é alterada por T. Existirá uma base na qual T é representada por uma matriz diagonal? Justifique. [3/20]

Resposta

4.1- A matriz em questão é $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, sendo o núcleo dado pela solução do sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Temos então $y = z$ e $x = -3z$ ou seja o núcleo é constituido pelo sub-espaço gerado pelo vector que tem por coordenadas $(-3, 1, 1)$ na base $\mathcal{B} = \{u^1, u^2, u^3\}$.

4.2- Temos que determinar os valores e vectores próprios de T. O polinómio caracteristico será

$$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2 = 0$$

cujas raizes são $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ (raiz dupla). Assim para que exista uma base na qual T é representada por uma matriz diagonal é necessário que o sub-espaço associado a $\lambda = 1$ tenha dimensão 2. Vamos resolver o sistema homogéneo correspondente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estas equações dizem que $z = 0$ logo os vectores próprios associados são os vectores que têm por coordenadas $(a, b, 0)$ na base $\mathcal{B} = \{u^1, u^2, u^3\}$ com a e b reais arbitrários sendo portanto um sub-espaço de dimensão 2. Uma base para este sub-espaço será $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$.

Para $\lambda = 0$ o sistema homogéneo vem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A primeira equação diz que $x = -3z$ e a segunda diz que $y = z$. Então os vectores próprios associados a são da forma $(-3c, c, c)$ com c real arbitrário. Uma base para este sub-espaço é

$(-3, 1, 1)$.

Assim T tem uma base de vectores próprios formada pelos vectores $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (-3, 1, 1)$ e, nessa base, T é representada por uma matriz diagonal.