ome: ____ Nº: _________

Álgebra Linear
Licenciaturas em Economia e Gestão
2.º Semestre de 2012/2013

Teste 11 de maio de 2013

A

Grupo I

1. Cada questão: certa 0,5 valores
   errada - 0,25 valores

   Considere um sistema de m equações a n incógnitas, representado na forma matricial pela equação $Ax = b$. Assinale com **V** ou **F** se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a)	Se $m < n$ então o sistema é impossível	F
b)	Se $m > n$ então o sistema é possível indeterminado	F
c)	Se a característica da matriz dos coeficientes é inferior a m então o sistema é possível indeterminado	F
d)	Se a matriz A é invertível então o sistema tem sempre solução, independentemente da matriz coluna dos termos independentes	V
e)	Se $m = n$ e a característica da matriz dos coeficientes é m então o sistema homogéneo associado é possível e determinado	V
f)	Se a característica da matriz dos coeficientes é m então o sistema é possível	V

ome: ____ Nº: _________

2. Considere o sistema de 3 equações a 4 incógnitas (*x, y, t, z*)

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 5x + 2t + 2z = 1 \\ 3x - 2y + t + z = 0 \end{cases}$$

a) [2 valores] Mostre que os vetores $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$ são soluções do sistema e através delas determine uma solução do sistema homogéneo associado.

Solução do sistema homogéneo = $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) [3 valores] Calcule a solução geral do sistema.

Solução geral = solução particular + solução sistema homogéneo associado

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -7+k \\ -k \end{bmatrix}, k \text{ € } R$$

ome: ____ Nº: _________

Grupo II

Seja T uma transformação linear de R^2 em R^2 :

$T\ (x, y) = (kx,\ x + y) \quad k \in R$

a) [2 valores] Determine k de modo que a transformação T admita inversa e, para esses valores, indique a expressão da transformação inversa T^{-1}.

T admite inversa se a matriz A que a representa for invertível, o que só se verifica com $k \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \; k \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/k & 0 \\ -1/k & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1}(x, y) = (x/k, -x/k + y)$$

b) [2 valores] Considere $k = 0$. Determine a dimensão e uma base do núcleo de T.

$$k = 0 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Nuc (T)} = \text{Null (A)} = \text{span } (1\ ,\ -1)$$

Base do núcleo = {(1,-1)} e dimensão =1

ome: ____ Nº: _________

Grupo III

Considere a matriz A = $\begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}$ $\alpha \neq 0$

a) [2 valores] A partir do polinómio característico calcule os valores próprios da matriz A.

a) Det ($\begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}$- λ I) = 0 $\Rightarrow (\alpha - \lambda)^2 - \alpha^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = 2\alpha$

b) [2 valores] Indique, com justificação, como poderia ter obtido os valores próprios de A sem calcular o polinómio característico.

b) Det ($\begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}$) = 0 e tr ($\begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix}$) =$2\alpha \Rightarrow$ valores próprios 0 e 2α

ome: ____ Nº: _________

Grupo IV

Seja B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$

a) [2 valores] Encontre os valores próprios de B e respetivas multiplicidades algébricas.

Det ($\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}$ $-\lambda$ I) = 0 $\Rightarrow (\beta - \lambda)\,((1-\lambda)^2 - 4) = 0 \Rightarrow \lambda = \beta \vee \lambda = -1 \vee \lambda = 3$

Se $\beta \neq -1 \wedge \beta \neq 3 \Rightarrow$ multiplicidade algébrica de cada valor próprio = 1

Se $\beta = -1 \Rightarrow$ multiplicidade algébrica do valor próprio – 1 é 2 e a multiplicidade algébrica do valor próprio 3 é 1

Se $\beta = 3 \Rightarrow$ multiplicidade algébrica do valor próprio 3 é 2 e a multiplicidade algébrica do valor próprio -1 é 1

b) [2 valores] Sem efetuar mais cálculos diga quando B é invertível e nesse caso apresente, justificando, os valores próprios de B^{-1}.

B é invertível se $\beta \neq 0$ e nesse caso os valores próprios de B^{-1} serão os inversos dos valores próprios de B, -1 , 1/3 e $1/\beta$