2013/2014 - 1º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
21 de Outubro de 2013

Grupo 1

1- Considere os segintes vectores de $\Re^3$: $u = (1,0,1)$ e $v = (1,0,0)$. Calcule o seguinte:
1.1- $\|u\|$. [1/20]
1.2- O ângulo entre u e v. [2/20]
1.3- Um valor de x que torne $(x,-3,5)$ perpendicular a u. [2/20]
1.4- Um vector não nulo perpendicular a u e v. [2/20]

Respostas

1.1- $\|u\| = \sqrt{< u,u >} = \sqrt{2}$
1.2- Seja θ o ângulo entre u e v. Sabemos que $\cos\theta = \frac{<u,v>}{\|u\|\times\|v\|}$ logo $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou seja $\theta = \pi/4$
1.3-$< (x,-3,5),(1,0,1) >= x+5$ logo, para termos a perpendicularidade, será $x = -5$.
1.4-$< (a,b,c),(1,0,1) >= 0$ implica $a+c = 0$. $< (a,b,c),(1,0,0) >= 0$ implica $a = 0$. Logo qualquer vector da forma $(0,b,0)$ com $b \neq 0$ serve.

2013/2014 - 1º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
21 de Outubro de 2013

Grupo 2

2. Considere as 2 matrizes $(2n \times 2n)$, $X = \begin{bmatrix} I_n & A \\ 0_n & -I_n \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ B & -I_n \end{bmatrix}$ onde I_n representa a matriz identidade $(n \times n)$, 0_n representa a matriz nula $(n \times n)$ e A e B são matrizes arbitrárias $(n \times n)$.

2.1- Calcule X^2 e Y^2. [1/20]

2.2- Porque é que X^{-1} e Y^{-1} existem sempre, independentemente do valor dos elementos das matrizes A e B? [2/20]

2.3- Consegue calcular explicitamente X^{-1} e Y^{-1}? (Sugestão: use o resultado de 2.1) [2/20]

Respostas

$$2.1\text{- } X^2 = \begin{bmatrix} I_n & A \\ 0_n & -I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & A \\ 0_n & -I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n^2 + A0n & 0 \\ 0 & I_n^2 + A0n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = I_{2n}$$

$$Y^2 = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ B & -I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ B & -I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n^2 + B0n & 0 \\ 0 & I_n^2 + B0n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = I_{2n}$$

2.2- Repare que as matrizes X e Y são ambas triângulares tendo na diagonal elementos diferentes de zero (valem ± 1). Logo a eliminação de Gauss pode ser levada até ao fim.

2.3- Da primeira alinea decorre imediatamente $X^{-1} = X$ e $Y^{-1} = Y$.

2013/2014 - 1º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
21 de Outubro de 2013

Grupo 3

3. Uma matriz A $(n \times n)$ é dita *ortogonal* se $A^T A = I_n$.
3.1- Que valores de θ tornam a seguinte matriz A ortogonal? [2/20]

$$A = \begin{bmatrix} \theta & 0 & \theta \\ \theta & 0 & -\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2- Mostre que a transposta de uma matriz ortogonal é uma matriz ortogonal. [2/20]
3.3- Mostre que o produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal. [2/20]
3.4- Mostre que duas colunas (ou duas linhas) distintas de uma matriz ortogonal são vectores perpendiculares. [2/20]

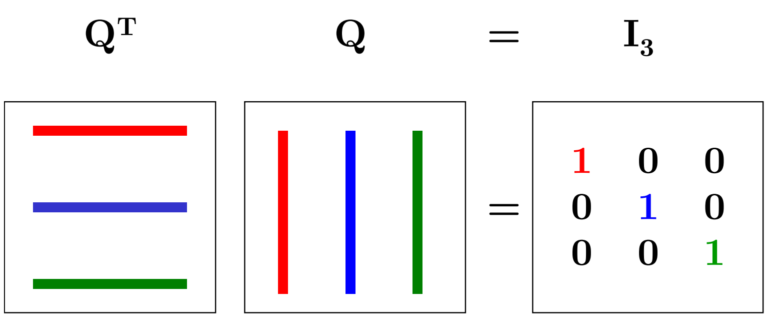
Respostas

3.1- $A^T A = \begin{bmatrix} \theta & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \theta & -\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta & 0 & \theta \\ \theta & 0 & -\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\theta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\theta^2 \end{bmatrix}$ logo $\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

3.2- Repare que a definição dada implica que A é ortogonal sse $A^{-1} = A^T$. Vejamos agora que *se A é ortogonal A^T também o é*. Com efeito sabemos que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Se A é ortogonal $(A^{-1} = A^T)$ teremos as igualdades $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = (A^T)^T$ o que mostra que a inversa de (A^T) é igual à sua transposta.

3.3- Sejam A e B ortogonais, então $(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T I_n B = B^T B = I_n$

3.4- Suponha que a matriz Q é ortogonal, ou seja, que $Q^T Q = I_n$. Este facto diz-nos alguma coisa muito importante sobre as colunas (e as linhas) da matriz Q. Olhe para o seguinte "diagrama esquemático" que representa a igualdade $Q^T Q = I_n$ para o caso de matrizes (3×3).



As colunas de Q são 3 vectores: o vermelho,o azul e o verde. Então Q^T terá exactamente esses 3 vectores por linhas. Repare agora que o 1 vermelho na matriz identidade I_3 foi obtido fazendo o produto interno do vector vermelho por ele próprio. Algo de semelhante se passa com os 1's azul e verde de I_3. Note agora que os 0's pretos de I_3 são obtidos fazendo o produto interno de vectores de cores diferentes. Ou seja, produtos internos de colunas de Q da mesma cor dão 1 ao passo que produtos internos de colunas de cores diferentes dão 0.