2012/2013 - 2º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
13 de Abril de 2013

Grupo 1

1- Considere os vectores $a = (1,1,1)$, $b = (0,1,1)$ e $c = (0,0,1)$.
1.1- Mostre que $\mathcal{B} = \{a,b,c\}$ é uma base de $\Re^3$. [3/20]
1.2- Quais as coordenadas do vector $v = (3,2,1)$ na base $\mathcal{B}$? [3/20]

Respostas

1.1- Basta mostrar que o conjunto $\mathcal{B} = \{a,b,c\}$ é linearmente independente. Para tal formamos uma matriz A cujas linhas são os vectores a,b,c :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $\det(A) = 1$ vem imediatamente que o conjunto $\mathcal{B} = \{a,b,c\}$ é linearmente independente.

1.2- Repare que $v = (3,2,1) = 3a - b - c$ logo as cordenadas de v na base $\mathcal{B}$ são $(3,-1,-1)_{\mathcal{B}}$

2012/2013 - 2º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
13 de Abril de 2013

Grupo 2

2- Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

2.1- Verifique que $AB = AC$ e no entanto $B \neq C$. [3/20]

2.2- Indique, justificando, uma condição para que $AB = AC$ implique $B = C$ no caso de matrizes $(n \times n)$ A, B, C arbitrárias. [3/20]

Respostas

2.1- $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

$AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

2.2- A condição é que exista A^{-1}. Com efeito, se assim for, $AB = AC$ implica $A^{-1}AB = A^{-1}AC$ ou seja $B = C$.

2012/2013 - 2º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
13 de Abril de 2013

Grupo 3

3- Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3.1- Use operações elementares sobre as linhas (eliminação de Gauss) para transformar a matriz A na identidade e mantenha o registo das matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ que as efectuaram. [2/20]

3.2- Escreva A em função das matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ e aproveite esse facto para calcular $\det(A)$. [3/20]

3.3- Confirme o valor de $\det(A)$ obtido na alinea anterior fazendo um desenvolvimento de Laplace do determinante de A. [3/20]

Respostas

3.1- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ a matriz da transformação elementar é

$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\det(E_1) = 1$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz da transformação elementar é

$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $\det(E_2) = -1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ a matriz da transformação elementar é

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ e $\det(E_3) = 1$

3.2- Temos, da alinea anterior, $E_3E_2E_1A = I$ logo $A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$ e $\det(A) = 1/[\det(E_1) \times \det(E_2) \times \det(E_3)] = -1$

3.3- Fazendo um desenvolvimento de Laplace do determinante de A pela primeira linha vem:

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \times \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \times \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 - 2 = -1$$