2013/2014 - 2º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
05 de Abril de 2014

Grupo 1

1- Considere os conjuntos $\mathcal{A}(d) = \{(x,y,z) \in \Re^3 : 2x + 3y + 6z = d\}$ para d real.

1.1- O que representa geométricamente $\mathcal{A}(d)$ para cada d fixo? [2/20]

1.2- Para que valores de d é $\mathcal{A}(d)$ um subespaço de $\Re^3$? [2/20]

1.3- Considere agora o conjunto $\mathcal{B} = \{(x,y,z) \in \Re^3 : (x,y,z) = \lambda(2,3,6), \lambda \in \Re\}$. Mostre que $\mathcal{B}$ é subespaço de $\Re^3$. [2/20]

1.4- Considere o complemento ortogonal de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^{\perp}$. Determine d tal que $\mathcal{B}^{\perp} = \mathcal{A}(d)$. [2/20]

1.5- Calcule a distância de $(1,1,1)$ a $\mathcal{A}(1)$. [2/20]

Respostas

1.1- Para cada d fixo $\mathcal{A}(d)$ é um plano de $\Re^3$ que passa no ponto $(d/2,0,0)$ e tem o vector normal $(2,3,6)$.

1.2- Apenas para $d = 0$ pois é um plano que passa pela origem.

1.3- $\mathcal{B}$ é formado pelo conjunto dos vectores colineares com $(2,3,6)$ que é obviamente o sub-espaço gerado por este vector.

1.4- $\mathcal{B}^{\perp} = \mathcal{A}(0)$ pois $\mathcal{A}(0)$ é o plano de $\Re^3$ que passa pela origem e de vector normal $(2,3,6)$.

1.5- $\mathcal{A}(1)$ é o plano que passa por $x_0 = (1/2,0,0)$ e tem vector normal $v = (2,3,6)$. A sua distância ao ponto $y = (1,1,1)$ é dada por $|< v, y - x_0 > |/\|v\| = 10/\sqrt{49} = \frac{10}{7}$

2013/2014 - 2º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
05 de Abril de 2014

Grupo 2

1. 2. Considere as matrizes A e B seguintes. Encontre a matriz X tal que $X = AX + B$. Comece por explicitar X em função de A e B. [5/20]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Resposta

2- $X = AX + B$ implica $X - AX = B$ ou seja $(I - A)X = B$ portanto $X = (I - A)^{-1}B$.

No nosso caso temos $(I - A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ que é uma matriz de uma transformação elementar (somar a 3ª linha à 2ª) cuja inversa é $(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Logo temos $X = (I - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

2013/2014 - 2º SEMESTRE
TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
05 de Abril de 2014

Grupo 3

3- Mostre que, se $abcd \neq 0$, temos sempre a igualdade seguinte:

$$\det\begin{bmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{bmatrix}$$

Será que o resultado continua válido se $abcd = 0$? [5/20]

Resposta

3- Se multiplicarmos a 1ª linha por a, a 2ª por b, a 3ª por c e a 4ª por d teremos:

$$\det\begin{bmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{bmatrix} = \frac{1}{abcd}\det\begin{bmatrix} a^3 & a^2 & a & abcd \\ b^3 & b^2 & b & abcd \\ c^3 & c^2 & c & abcd \\ d^3 & d^2 & d & abcd \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{bmatrix}$$

em que a última igualdade resulta de dividir a 4ª coluna por $abcd$.

Se $abcd = 0$ então pelo menos um dos valores a, b, c, d é nulo e alguns dos raciocinios anteriores não são válidos.

No entanto se apenas um destes valores se anular, por exemplo se $a = 0$ e b, c, d diferentes de zero (se for outro valor a anular-se o caso reduz-se a este por troca de linhas) teremos:

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & 0 \\ c^2 & c & 1 & 0 \\ d^2 & d & 1 & 0 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/bcd & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 0 \\ c^3 & c^2 & c & 0 \\ d^3 & d^2 & d & 0 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= -\det\begin{bmatrix} b^3 & b^2 & b \\ c^3 & c^2 & c \\ d^3 & d^2 & d \end{bmatrix}$$

Onde a primeira igualdade vem de dividir a 1ª linha por bcd e multiplicar as 2ª, 3ª e 4ª linhas por b, c e d respectivamente. A segunda igualdade vem de, na matriz da esquerda, fazer o desenvolvimento de Laplace pela última coluna e de, na matriz da direita, fazer o desenvolvimento de Laplace pela primeira linha. Então, neste caso, a igualdade continua vàlida.

Se pelo menos dois dos valores a, b, c, d se anularem a igualdade é válida sendo ambos os determinantes nulos.

Com efeito se $a = b = 0$ (se forem outros o caso reduz-se a este por troca de linhas) teremos:

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c^2 & c & 1 & 0 \\ d^2 & d & 1 & 0 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Os dois determinantes são nulos porque têm ambos as duas primeiras linhas iguais.

Assim a igualdade é sempre válida, mesmo se $abcd = 0$.