2012/2013 - 2º SEMESTRE- 2ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
4 de Julho de 2013

1- Um *n-simplex* é um conjunto $S_n \subset \Re^n$ definido por:

$S_n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \Re^n : x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ldots, x_n \geq 0\}$.

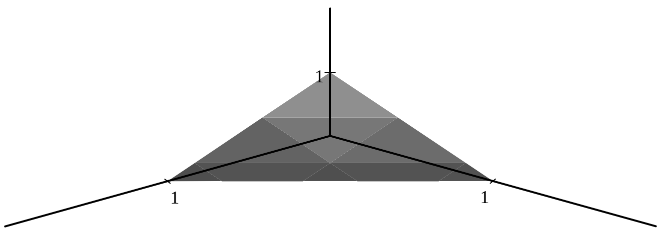
1.1- Desenhe $S_3 = \{(x_1,x_2,x_3) \in \Re^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$. [1/20]

1.2- Qual é o ângulo formado por duas arestas adjacentes (todos os pares de arestas são adjacentes a 3 dimensões!) de S_3? E qual é a distância do plano $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ à origem de $\Re^3$? [1/20]

1.3- Calcule agora o ângulo formado por duas arestas adjacentes de S_n e a distância do plano $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ à origem de $\Re^n$. O resultado obtido surpreende-o(a)? [2/20]

Respostas

1.1-



1.2-

Há 2 maneiras de atacar a primeira parte desta questão. Uma consiste em observar que S_3 é um triângulo equilatero logo os seus ângulos internos medem todos $\pi/3$ de coseno igual a 1/2. Outra consiste em calcular 2 arestas adjacentes, por exemplo no vértice $(1,0,0)$, $a_1 = (1,0,0) - (0,1,0) = (1,-1,0)$ e $a_2 = (1,0,0) - (0,0,1) = (1,0,-1)$, e ver que o seu ângulo α é tal que $\cos(\alpha) =< a_1, a_2 > /(\|a_1\| \times \|a_2\|) = 1/2$. Qualquer outro par de arestas adjacentes daria, óbviamente, o mesmo.

Para resolver a segunda parte repare que o plano em questão passa pelo ponto $x_0 = (1,0,0)$ e que tem um vector normal $v = (1,1,1)$. Pretende-se a distância d ao ponto $y = (0,0,0)$ que sabemos ser dada por $d = |< v, y - x_0 > |/\|v\| = 1/\sqrt{3}$.

1.3-

Para resolver a primeira parte calculamos (em $\Re^n$ não há desenhos!) 2 arestas adjacentes, por exemplo no vértice $(1,0,0,\ldots,0)$, $a_1 = (1,0,0,\ldots,0) - (0,1,0,\ldots,0)$ e $a_2 = (1,0,0,\ldots,0) - (0,0,1,\ldots,0)$, ou seja $a_1 = (1,-1,0,\ldots,0)$ e $a_2 = (1,0,-1,\ldots,0)$, e verificamos que o seu ângulo α é tal que $\cos(\alpha) =< a_1, a_2 > /(\|a_1\| \times \|a_2\|) = 1/2$. Qualquer outro par de arestas adjacentes daria, evidentemente, o mesmo. Para quem isto não for "evidente" repare que S_n se mantem inalterado se fizermos uma permutação das variáveis, logo os ângulos têm que ser iguais para qualquer par de arestas adjacentes.

Para resolver a segunda parte repare que o plano em questão passa pelo ponto $x_0 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ e que tem um vector normal $v = (1, 1, 1, \ldots, 1)$. Pretende-se a distância d ao ponto $y = (0, 0, 0, \ldots, 0)$ que sabemos ser dada por $d = |< v, y - x_0 > |/\|v\| = 1/\sqrt{n}$.

O que poderá parecer surpreendente é o facto de d variar com n enquanto que os ângulos não.

2012/2013 - 2º SEMESTRE- 2ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
4 de Julho de 2013

2. Considere o seguinte sistema de equações nas variáveis x, y, z e com o parâmetro θ:

$$2x + 2y + 3z = 0$$
$$4x + 8y + 12z = -4$$
$$6x + 2y + \theta z = 4$$

2.1- Determine os valores de θ para os quais o sistema tem soluções. [1/20]

2.2- Determine os valores de θ para os quais a solução é única e calcule a solução nesse(s) caso(s). [1/20]

2.3- Determine os valores de θ para os quais existem infinitas soluções e calcule a solução geral nesse(s) caso(s). [2/20]

Respostas

2.1-

Forme a matriz aumentada e proceda por eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 12 & -4 \\ 6 & 2 & \theta & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & -4 \\ 0 & -4 & \theta-9 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & \theta-3 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo o sistema tem sempre soluções independentemente dos valores de θ. O sistema simplificado é:

$$2x + 2y + 3z = 0$$
$$4y + 6z = -4$$
$$(\theta - 3)z = 0$$

2.2-

A solução é única se $\theta \neq 3$ e vale $z = 0, y = -1, x = 1$.

2.3-

Se $\theta = 3$ a última equação é redundante $(0 = 0)$ e existem infinitas soluções. Nesse caso o sistema é:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= 0 \\ 4y + 6z &= -4 \end{aligned}$$ e uma solução particular é $z = 0, y = -1, x = 1$. O sistema homógeneo associado é:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= 0 \\ 4y + 6z &= 0 \end{aligned}$$ tomamos z como variável livre, o espaço nulo tem dimensão 1 e uma sua base é $(0, -3/2, 1)$.

Logo a solução geral é da forma $(x, y, z) = (1, -1, 0) + \lambda(0, -3/2, 1)$.

2012/2013 - 2º SEMESTRE- 2ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
4 de Julho de 2013

3. Mostre que as duas afirmações seguintes são verdadeiras:

3.1- Se $x \neq \bar{0}$ for um *vector linha* com n componentes então $x^T x$ é uma matriz $(n \times n)$ de caracteristica (*rank*) 1.(Pense primeiro no caso particular $x = (1,2,3)$ e calcule $x^T x$.) [2/20]

3.2- Se A e B são duas matrizes $(n \times n)$ que comutam, isto é, se $AB = BA$, então A comuta com qualquer potência de B, ou seja, tem-se sempre $AB^k = B^k A$ para qualquer k natural. (Começe por mostrar que $AB^2 = B^2 A$ e depois generalize para qualquer expoente k natural.) [2/20]

Respostas

3.1- $[1,2,3]^T[1,2,3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ repare que a primeira linha da matriz é o vector $(1,2,3)$ multiplicado por 1 a segunda linha tem este vector multiplicado por 2 e a terceira tem o mesmo vector multiplicado por 3. Em geral se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a primeira linha de $x^T x$ terá o vector x multiplicado por x_1 a segunda o vector x multiplicado por x_2 e a n-ésima linha terá o vector x multiplicado por x_n. Assim teremos $rank(x^T x) = 1$.

3.2- Se $AB = BA$ teremos, multiplicado à esquerda por B, $BAB = B^2 A$ e portanto $AB^2 = B^2 A$. No caso geral admita por hipótese de indução que $AB^{k-1} = B^{k-1} A$. Agora, multiplicando à esquerda por B, teremos $BAB^{k-1} = B^k A$ e portanto $AB^k = B^k A$

2012/2013 - 2º SEMESTRE- 2ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
4 de Julho de 2013

4. Considere as seguintes 3 matrizes (2×2): $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = 2A + B$.

4.1- Verifique que A, B e C são definidas positivas.[2/20]

4.2- Mostre agora que se A e B são duas matrizes $(n \times n)$ definidas positivas então a matriz $C = aA + bB$, com $a > 0$ e $b > 0$ reais , também é definida positiva.[2/20]

Respostas

4.1-A, B e $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ são claramente definidas positivas pois as suas cadeias de menores principais são positivas.

4.2- Temos que provar que $x^T Cx > 0$ para todo o $x \neq 0$. Mas $x^T Cx = a(x^T Ax) + b(x^T Bx)$. Como $a > 0$, $b > 0$, $x^T Ax > 0$ para $x \neq 0$ e $x^T Bx > 0$ para $x \neq 0$ vem que $x^T Cx > 0$ para todo o $x \neq 0$.

2012/2013 - 2º SEMESTRE- 2ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
4 de Julho de 2013

5- Dado o conjunto $N = \{1,2,\ldots,n\}$ considere dois sub-conjuntos ordenados, não vazios, $I = \{i_1,i_2,\ldots,i_p\} \subseteq N$ com $1 \leq i_1 < i_2 <\ldots< i_p \leq n$ e $J = \{j_1,j_2,\ldots,j_p\} \subseteq N$ com $1 \leq j_1 < j_2 <\ldots< j_p \leq n$, tendo o mesmo número de elementos. Seja agora uma matriz A, $(n \times n)$, e designe por $A(I,J)$ a sub-matriz (quadrada) de A com as linhas escolhidas em I e as colunas em J. A matriz A diz-se *totalmente positiva* se $det[A(I,J)] \geq 0$ para todas as escolhas de $I \subseteq N$ e $J \subseteq N$. Similarmente a matriz A diz-se *estritamente totalmente positiva* se $det[A(I,J)] > 0$ para todas as escolhas de $I \subseteq N$ e $J \subseteq N$.

5.1- Dê exemplos de matrizes (2×2) totalmente positivas e estritamente totalmente positivas.[1/20]

5.2- Mostre que uma matriz A, $(n \times n)$, real e simétrica é totalmente positiva então é semi-definida positiva e que se a matriz em questão for estritamente totalmente positiva então as suas colunas são linearmente independentes. [1/20]

5.3- Mostre que se A for (estritamente) totalmente positiva então a matriz que se obtem de A invertendo a ordem das linhas e das colunas também o é. [1/20]

5.4- Mostre que se A, $(n \times n)$, for (estritamente) totalmente positiva então a matriz que se obtem de A somando à linha i, $i \in \{2,\ldots,n-1\}$, um multiplo positivo da linha $i-1$ ou da linha $i+1$ também é (estritamente) totalmente positiva. [1/20]

Respostas

5.1- A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é totalmente positiva mas não estritamente totalmente positiva. A matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é estritamente totalmente positiva.

5.2- Se A for totalmente positiva então todos os seus menores principais são não negativos logo A é semi-definida positiva.

Se A for estritamente totalmente positiva então toda a cadeia de menores principais é positiva o que implica que A é definida positiva, logo que $det(A) > 0$ e portanto que as suas colunas são linearmente independentes.

5.3- Tome uma sub-matiz $A(I,J)$ nas condições do enunciado. Repare que se a inversão da ordem das linhas for obtida com k trocas de linhas consecutivas a inversão da ordem das colunas será feita com k trocas de colunas consecutivas. No total teremos feito $2k$ trocas e, como $2k$ é sempre par, os determinantes não se alteram.

5.4- Tome uma sub-matiz $A(I,J)$ nas condições do enunciado. Se $i \notin I$ o valor de

$det[A(I,J)]$ não se altera. Se i e $i-1$ (ou i e $i+1$) pertencem ambos a I então o valor de $det[A(I,J)]$ também não se altera.

Se $i \in I$ e $i-1 \notin I$ (ou se $i \in I$ e $i+1 \notin I$) então o novo determinante é a soma de $det[A(I,J)]$ com o determinante de uma matriz obtida de $A(I,J)$ substituindo a linha i por um multiplo positivo da linha $i-1$ (ou $i+1$), ou seja, a soma de $det[A(I,J)]$ com um multiplo positivo de $det[A(I',J)]$ onde $I' = I - \{i\} \cup \{i-1\}$ (ou $I' = I - \{i\} \cup \{i+1\}$). Repare que a substituição de i por $i-1$ (ou por $i+1$) não altera a ordem das linhas e, portanto, o conjunto I' continua ordenado e com o mesmo número de elementos de J. Assim se A for totalmente positiva temos $det[A(I,J)] \geq 0$ e $det[A(I',J)] \geq 0$ logo a matriz que se obtem de A somando à linha i, $i \in \{2,\ldots,n-1\}$, um multiplo positivo da linha $i-1$ (ou da linha $i+1$) também é totalmente positiva. Se A for estritamente totalmente positiva temos $det[A(I,J)] > 0$ e $det[A(I',J)] > 0$ logo a matriz que se obtem de A somando à linha i, $i \in \{2,\ldots,n-1\}$, um multiplo positivo da linha $i-1$ (ou da linha $i+1$) também é estritamente totalmente positiva.