2013/2014 - 2º SEMESTRE- 1ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
4 de Junho de 2014

Grupo 1

1- Considere a matriz A onde a, b, c, d são números reais:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{bmatrix}$$

1.1- Calcule AA^T. Pode dizer alguma coisa sobre as linhas de A? [1/20]

1.2- Agora use o resultado da alinea anterior para mostrar que $\det(A) = 0$ se e só se $a = b = c = d = 0$. [2/20]

Respostas

1.1- $AA^T = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & -d & c \\ c & d & -a & -b \\ d & -c & b & -a \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{bmatrix}.$$

As linhas de A são mutuamente ortogonais.

1.2- Da igualdade anterior temos $\det(AA^T) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$ ou seja $[\det(A)]^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$ donde $\det(A) = 0$ se e só se $a = b = c = d = 0$.

2013/2014 - 2º SEMESTRE- 1ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
4 de Junho de 2014

Grupo 2

2- Seja A uma matriz $(m \times n)$ cujo espaço das linhas, $\mathcal{L}(A)$, é o plano de $\Re^3$ de equação cartesiana $4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0$.

2.1- Dê uma base e a dimensão de $\mathcal{L}(A)$. [1/20]

2.2- Qual o valor de n? Justifique. [1/20]

2.3- Pode dizer alguma coisa sobre o valor de m? Justifique. [2/20]

2.4- Escreva, se possível, a solução do sistema homogénio $Ax = 0^m$ onde 0^m representa o vector nulo de $\Re^m$. [2/20]

Respostas

2.1- Como $\mathcal{L}(A)$ é um plano de $\Re^3$ temos $\dim[\mathcal{L}(A)] = 2$. Os vectores $(1/4, 1/5, 0)$ e $(0, 1/5, 1/3)$ são uma base de $\mathcal{L}(A)$.

2.2- Uma vez que o espaço das linhas, $\mathcal{L}(A)$, está em $\Re^3$ sabemos que $n = 3$.

2.3- Como temos $\dim[\mathcal{L}(A)] = 2$ então $rank(A) = 2$ e seguramente $m \geq 2$.

2.4- O conjunto das soluções de $Ax = 0^m$, ou seja o espaço nulo de A, $\mathcal{N}(A)$, é o complemento ortogonal de $\mathcal{L}(A)$. Como $\mathcal{L}(A)$ é o plano de $\Re^3$ de equação cartesiana $4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0$ conjunto das soluções de $Ax = 0^m$ é da forma
$\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \Re^3 : (x_1, x_2, x_3) = \lambda(4, -5, 3) \text{ com } \lambda \text{ real arbitrário}\}$.

2013/2014 - 2º SEMESTRE- 1ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
4 de Junho de 2014

Grupo 3

3- Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3.1- Mostre que $A^{-1} = A$ e calcule os valores próprios de A. [1/20]

3.2- Agora mostre que se A for uma matriz $(n \times n)$ tal que $A^{-1} = A$ então os seus valores proprios valem $+1$ ou -1. [2/20]

3.3- Mostre agora se A for uma matriz $(n \times n)$ diagonalizável na qual todos os valores proprios valem $+1$ ou -1 então temos $A^{-1} = A$. [3/20]

Respostas

3.1- Para mostrar que $A^{-1} = A$ basta verificar que $A^2 = I$. Com efeito temos

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

3.2- Seja λ um valor próprio de A. Como $A^{-1} = A$ temos $\lambda = \lambda^{-1}$ ou seja $\lambda = \pm 1$.

3.3- Se A é diagonalizavel temos $B^{-1}AB = D$ onde D é a matriz diagonal dos valores próprios de A. Assim teremos $A = BDB^{-1}$ e portanto $A^2 = BDB^{-1}\,BDB^{-1} = BD^2B^{-1}$. Mas como os valores próprios de A valem ± 1 teremos $D^2 = I$ e então a igualdade $A^2 = BD^2B^{-1}$ reduz-se a $A^2 = I$ o que implica $A^{-1} = A$.

2013/2014 - 2º SEMESTRE- 1ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
4 de Junho de 2014

Grupo 4

4- Considere a seguinte forma quadrática: $Q(x_1,x_2) = -5x_1^2 + 2x_1x_2 - 5x_2^2$.

4.1- Escreva a matriz A, real e simétrica, que representa a forma quadrática e classifique-a usando os menores principais de A. [1/20]

4.2- Confirme o resultado da alinea anterior usando os valores próprios de A. [2/20]

4.3- Exiba a mudança de variáveis que permite a confirmação anterior. [2/20]

Respostas

4.1- $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$. Os menores da cadeia de menores principais são $\det[-5] = -5$ e $\det\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = 24$. Como o menor de ordem impar é negativo e o de ordem par é positivo comcluimos que a forma quadrática é definida negativa.

4.2- O polinómio caracteristico é $\det\begin{bmatrix} -5-\lambda & 1 \\ 1 & -5-\lambda \end{bmatrix} = (5+\lambda)^2 - 1 = 0$ cujas raizes são $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = -6$ logo confirma-se o resultado obtido na alinea anterior.

4.3- Para tal temos que calcular uma base ortonormada de vectores próprios.

Para $\lambda_1 = -4$ o sistema homogénio vem:

$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ cuja solução é $x_1 = x_2$ e portanto um vector próprio de norma 1 é $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Para $\lambda_1 = -6$ o sistema homogénio vem:

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ cuja solução é $x_1 = -x_2$ e portanto um vector próprio de norma 1 é $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Assim a mudança de variáveis pretendida é $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ou seja $\begin{array}{l} x_1 = (y_1 + y_2)/\sqrt{2} \\ x_2 = (y_1 - y_2)/\sqrt{2} \end{array}$. Com efeito temos:

$Q(x_1,x_2) = -5x_1^2 + 2x_1x_2 - 5x_2^2 = -\frac{5}{2}(y_1+y_2)^2 + (y_1+y_2)(y_1-y_2) - \frac{5}{2}(y_1-y_2)^2 = -4y_1^2 - 6y_2^2$.