2012/2013 - 2º SEMESTRE- 1ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
4 de Junho de 2013

Grupo 1

1. Considere o conjunto $B = \{a, b, c, d\}$ de vectores de um espaço vectorial *V*.

1.1- Assuma que *B* é linearmente independente. O que pode dizer sobre $dim(V)$? [1/20]

1.2- Agora admita que *B* é uma base de *V* e considere o conjunto $C = \{a+b+c, b+c+d, c+d+a, d+a+b\}$. Mostre que *C* também é uma base de *V*. [2/20]

1.3- Exiba a matriz de mudança de base que permite passar de coordenadas na base *C* para coordenadas na base *B*. [2/20]

Respostas

1.1- $dim(V) \geq 4$.

1.2- Como *B* é uma base temos que $dim(V) = 4$ portanto para provar que *C* é base basta mostrar que *C* é independente.

Para provar que *C* é independente temos que mostrar que $\lambda_1(a+b+c) + \lambda_2(b+c+d) + \lambda_3(c+d+a) + \lambda_4(d+a+b) = 0$ implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Mas a igualdade acima escreve-se

$a(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4) + b(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4) + c(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) + d(\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4) = 0$ e a independencia de *B* implica

$(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4) = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_4) = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) = (\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4) = 0$ ou seja implica o seguinte sistema homogénio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que terá por única solução $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ se a matriz tiver o determinante diferente de 0.

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 3$$

1.3- É a matriz cujas colunas são as coordenadas dos vectores de *C* na base *B*, ou seja é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2012/2013 - 2º SEMESTRE- 1ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
4 de Junho de 2013

Grupo 2

2-Considere a seguinte matriz dividida em blocos: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 7 & 8 & | & 1 & 5 \\ 9 & 10 & | & 6 & 20 \end{bmatrix}$

2.1- Calcule $det(A)$, e verifique que $det(A) = det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$. [1/20]

2.2- Será que o que se passou na alinea anterior se generaliza para matrizes A $(n \times n)$ da forma $A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$ onde B, C, D designam matrizes quadradas e 0 designa a matriz nula, isto é, será que neste caso temos sempre $det(A) = det(B) \times det(D)$? Justifique. [2/20]

2.3- Dê um exemplo com matrizes (2×2) A, B, C e D tais que $det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \neq det(A) \times det(D) - det(B) \times det(C)$. [2/20]

Respostas

2.1-

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 1 & 5 \\ 9 & 10 & 6 & 20 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 1 & 5 \\ 9 & 10 & 6 & 20 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & -1/2 & 0 \\ 9 & 10 & 6 & 20 \end{bmatrix} = 20$$

$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -2$ $\det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} = -10$ logo vale

$$det(A) = det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$$

2.2- Ao reduzir $A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ C & D \end{bmatrix}$ à forma triangular quando trabalha sobre as colunas do bloco B o bloco D não é alterado devido ao bloco de zeros acima dele, logo quando terminar a redução de A à forma triângular terá $det(A) = det(B) \times det(D)$.

2.3- $\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 1 & 5 \\ 9 & 10 & 6 & 20 \end{bmatrix} = -60,\ \det\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} = -2,\ \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$

logo $\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \det\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \times \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 22 \neq -60$

2012/2013 - 2º SEMESTRE- 1ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
4 de Junho de 2013

Grupo 3

3- Considere a seguinte matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ que está na *forma reduzida em escada por linhas*.

3.1- Se C for a forma reduzida em escada por linhas da matriz aumentada do sistema de equações lineares $Ax = b$ escreva a sua solução geral. [3/20]

3.2- Se C for a forma reduzida em escada por linhas da matriz dos coeficientes do sistema homogénio $Bx = 0$ escreva a sua solução geral. [2/20]

Respostas

3.1- Temos então o sistema equivalente:

$x = 2 - 2w$

$y = 2 - 2w$ e uma solução particular é $\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$z = 3 + 4w$

Uma base para o espaço das soluções do sistema homogéneo associado é $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ logo a solução geral é dada por

$\begin{bmatrix} x & y & z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ com λ real arbitrário.

3.2- Neste caso teriamos o sistema homogéneo equivalente

$x = -2w - 2t$

$y = -2w - 2t$, uma base para o o espaço das suas soluções é contituida pelos vectores

$z = 4w - 3t$

$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ logo a solução geral do sistema é da forma:

$\begin{bmatrix} x & y & z & w & t \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ com λ_1 e λ_2 reais arbitrários.

2012/2013 - 2º SEMESTRE- 1ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
4 de Junho de 2013

Grupo 4

4- Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

4.1- Encontre os valores próprios de A e mostre que A é diagonalizável. [1/20]

4.2- Encontre uma matriz B tal que $B^{-1}AB = D$ onde D designa a matriz diagonal dos valores próprios de A. [2/20]

4.3- Aproveite a alinea anterior para calcular A^{100}. [2/20]

Respostas

4.1- $\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$ as raizes são $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$ logo, dado que os valores próprios são distintos, sabemos que existe uma base de vectores próprios e que a matriz é diagonalizável.

4.2- Para $\lambda = 1$ o sistema homogénio vem:

$\begin{matrix} 0x + 2y = 0 \\ 0x - 2y = 0 \end{matrix}$ logo os vectores próprios são da forma $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$

Para $\lambda = -1$ o sistema homogénio vem:

$\begin{matrix} 2x + 2y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{matrix}$ logo os vectores próprios são da forma $\begin{bmatrix} -b \\ b \end{bmatrix}$

Então temos, por exemplo, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4.3- de $B^{-1}AB = D$ vem $A = BDB^{-1}$ e $A^{100} = BD^{100}B^{-1}$. Como neste caso $D^{100} = I_2$ vem $A^{100} = I_2$.