2012/2013 - 1º SEMESTRE- 1ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
2 de Janeiro de 2013

Grupo 1

1- Considere o conjunto $C = \{(t,0,t) : t \in \Re\}$.

1.1- Mostre que C é um sub-espaço de $\Re^3$. [1/20]

1.2- Mostre que qualquer vector $z \in C$ é uma combinação linear única dos vectores $x = (1,0,0)$ e $y = (0,0,1)$. Será que este facto mostra que os vectores x e y são uma base de C? Porquê? Se a resposta for não exiba uma base de C. Qual a dimensão de C? [2/20]

1.3- Seja agora D o sub-espaço gerado por x e y, $D = span\{x,y\}$. Será que os vectores x e y são uma base de D? Dê uma interpretação geométrica para os sub-espaços C e D. Qual é a relação entre eles? [2/20]

Respostas

1.1- É fácil de ver que qualquer combinação linear de vectores de C está em C. Com efeito tomemos $(a,0,a) \in C$ e $(b,0,b) \in C$. Então teremos $\alpha(a,0,a) + \beta(b,0,b) = (\alpha a + \beta b, 0, \alpha a + \beta b) \in C$ para quaisquer α e β reais.

1.2- Claro que $(t,0,t) = t(1,0,0) + t(0,0,1)$ para qualquer t real. No entanto os vectores $x = (1,0,0)$ e $y = (0,0,1)$ não são uma base de C porque não pertencem a C. O vector $(1,0,1)$ é uma base de C porque qualquer vector de C se escreve $t(1,0,1)$. Daqui decorre que $\dim(C) = 1$.

1.3- Os vectores x e y são claramente linearmente independentes logo são uma base de $D = span\{x,y\}$. Repare que D é o plano XOZ de $\Re^3$ enquanto que C é a diagonal dos quadrantes impares desse plano. Claro que C é sub-espaço de D.

2012/2013 - 1º SEMESTRE- 1ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
2 de Janeiro de 2013

Grupo 2

2- Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$ e admita que sabemos que a sua solução geral é da forma:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ com } \lambda_1 \text{ e } \lambda_2 \text{ em } \Re$$

Admita ainda que a matriz A é $(m \times n)$ e designe por $A^1, \ldots, A^n$ as suas colunas. Com base nesta informação responda, justificando, às seguintes perguntas. No caso de a informação fornecida não ser suficiente para responder diga-o.

2.1- Quanto vale n? [1/20]

2.2- Quanto vale m? [1/20]

2.3- Quanto vale $rank(A)$? [1/20]

2.4- Escreva b como combinação linear das colunas de A. [1/20]

2.5- Escreva uma combinação linear (não trivial!) das colunas de A que seja igual ao vector nulo 0^m. [1/20]

Respostas

2.1- Repare que n designa a dimensão de x logo $n = 5$.

2.2- Não há informação sobre o valor exacto de m mas, da resposta a 2.3, pode-se concluir que $m \geq 3$.

2.3- Sabemos que a dimensão do espaço nulo de A, $N(A)$, somada com a dimensão do espaço da linhas de A, $L(A)$, é n pois são complementos ortogonais em $\Re^n$. Da solução geral deduzimos que $dim(N(A)) = 2$ e como sabemos que $dim(L(A)) = rank(A)$ vem $2 + rank(A) = 5$ ou seja $rank(A) = 3$.

2.4- Qualquer solução do sistema de equações dá uma combinação linear das colunas de A igual ao segundo membro b logo temos, por exemplo, $A^1 + 2A^2 - A^4 = b$.

2.5- Qualquer solução do sistema homogénio associado dá uma combinação linear das colunas de A igual ao vector nulo 0^m logo temos, por exemplo, $2A^1 + A^2 + A^3 = 0^m$.

2012/2013 - 1º SEMESTRE- 1ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
2 de Janeiro de 2013

Grupo 3

3- Considere a matriz A e os vectores v e w que se seguem:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.1- Mostre que v e w são vectores próprios de A e encontre os valores próprios associados. [1/20]

3.2- Diagonalize a matriz A, isto é, encontre uma matriz B e uma matriz diagonal D tais que $B^{-1}AB = D$. A partir dos cálculos já efectuados mostre que A tem inversa e diga como diagonalizar A^{-1} sem efectuar mais cálculos. [2/20]

3.3- Dada a seguinte igualdade, indique quanto valem as constantes a e b. [2/20]

$$|A|A^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & a & 17 \\ 5 & 2 & -11 \\ b & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Respostas

3.1- $Av = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3v$ logo v corresponde ao valor próprio 3

$Aw = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = w$ logo w corresponde ao valor próprio 1

3.2- Para encontrar o terceiro valor próprio podiamos escrever o polinómio caracteristico $|A - \lambda I|$ e baixar-lhe o grau dividindo-o por $(\lambda - 3)(\lambda - 1)$ mas é mais prático usar o facto de $tr(A)$ ser a soma dos valores próprios. Como $tr(A) = 3$ concluimos que o valor próprio que falta é -1. Como os valores próprios são todos diferentes temos a garantia da existencia de uma base de vectores próprios. Vamos calcular o vector próprio que falta resolvendo o sistema homogenio $(A - \lambda I)x = 0$ para $\lambda = -1$.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para tal formamos a matriz aumentada e reduzimo-la ao formato reduzido em escada por linhas:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & -7 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 5 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 12/5 & 12/5 & 0 \\ 0 & 4/5 & 4/5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 5 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 12/5 & 12/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3/5 & -7/5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde uma solução é $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ logo a matriz B pretendida é

$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Claro que a matriz A tem inversa pois $|A| = 3 \times 1 \times (-1) = -3$ e temos $B^{-1}AB = \Lambda$ onde Λ designa a matriz diagonal dos valores próprios. Invertendo ambos os membros da igualdade vem $B^{-1}A^{-1}B = \Lambda^{-1}$ logo B também diagonalisa A^{-1}.

3.3- Do facto de sabermos que $A^{-1} = (Adj(A))^T/|A|$ concluimos que a matriz do lado direito da igualdade é $(Adj(A))^T$. Então a é o cofactor da posição $(2,1)$, ou seja

$a = -\det\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = -5$, e b é o cofactor da posição $(1,3)$, ou seja

$b = +\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = -2$.

2012/2013 - 1º SEMESTRE- 1ª ÉPOCA
EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR (1303)
2 de Janeiro de 2013

Grupo 4

4- Considere a seguinte forma quadrática $Q(x_1,x_2,x_3) = 7x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_3$

4.1- Escreva a matriz real e simétrica A, (3×3), que a representa na forma $Q(x_1,x_2,x_3) = x^TAx$. [1/20]

4.2- Classifique $Q(x_1,x_2,x_3)$. (Sugestão: use a cadeia dos menores principais) [2/20]

4.3- Mostre que se uma forma quadrática em n variáveis x^TAx for definida positiva então os elementos diagonais de A têm que ser números positivos. (Sugestão: pense na base canónica de $\Re^n$) [2/20]

Respostas

4.1-$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

4.2- Seguindo a sugestão temos $\det(A(1)) \;\; = 7 > 0$,

$\det(A(2)) \;\; = \det\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 14 > 0$,

$\det(A(3)) \;\; = \det\begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix} = 7 \times 14 - 2 = 96 > 0$

logo $Q(x_1,x_2,x_3)$ é definida positiva.

4.3- Repare que se e_i designar o i-ésimo vector da base canónica de $\Re^n$, isto é, se e_i for um vector com todas as componentes iguais a zero excepto a i-ésima que vale 1 (por exemplo $e_1 = (1,0,\ldots,0)$) teremos que A definida positiva implica $e_i^TAe_i > 0$ ou seja $a_{ii} > 0$ para $i = 1,\ldots n$.