CATÓLICA LISBON
SCHOOL OF BUSINESS & ECONOMICS
UNIVERSIDADE CATÓLICA PORTUGUESA

Matemática III **2011/2012 1ºSemestre**

Grupo I

---

1) Calcule os integrais:

a) $\iint\limits_D (2x+1)\,(e^{x^2-y}+e^{x+y})dxdy$ sendo $D\begin{cases} y\geq x^2 \\ y\leq x^2+1 \\ 1\leq x+y\leq 2 \\ x\geq 0 \end{cases}$

b) $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} x^2\ dy \ + \int_1^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_{x-1}^{\sqrt{2x-x^2}} x^2\ dy$

(4.5)

2) Mostre que toda a equação do tipo $y\,f(xy)dx + x\,g(xy)dy = 0$

se transforma numa equação de variáveis separadas fazendo a substituição $y=\dfrac{t}{x}$

(1.5)

3) A equação $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ admite um factor integrante da forma $\lambda = f(y)$

a) Determine a expressão que permite calcular esse factor integrante.

b) Resolva a equação $(2xy+y^3)dx+(x^2+3xy^2-x^2y-xy^3+4)dy=0$

(3.0)

Grupo II

---

4) Resolva as equações diferenciais:

a) $xy' + xy^2 + 2y + y^2x^3 \ln x = 0$ Sugestão: faça $y = \dfrac{1}{z - x}$

b) $ydx = (2x + \sqrt{xy^5})dy$

(4.5)

5) Considere a equação $y^{IV} - 4y''' + 9y'' + ay' = Q(x)$ com $a \in \mathbb{R}$.

a) Sabendo que $y = e^{2x}$ é uma solução da equação homogénea, determine o valor de $a \in R$. Para o valor de a encontrado, resolva a equação para $Q(x) = 0$

b) Determine a forma dos integrais particulares da equação completa (**<u>não calcule</u>**) sendo

$$Q(x) = -\frac{5e^x}{e^{2x+1}} + 4xe^{2x} + \frac{-x \operatorname{sen} x + \cos(2x)}{4e^{-x}}$$

(2.5)

6) Resolva a equação

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = \frac{\ln x}{2} + \frac{5}{3x}$$

(2.25)

7) Resolva a equação com diferenças

$$y_{k+4} + y_{k+3} + 2y_{k+2} - 4y_{k+1} = 14$$

(1.75)

RESOLUÇÃO

GRUPO I

1.

(a) Na Figura 1 está representado o domínio.

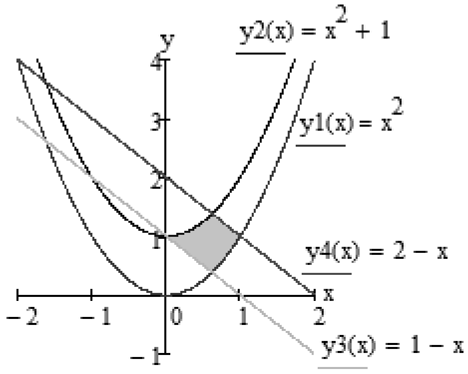

Figura 1

Podemos reescrever o domínio da seguinte maneira[1]:

$$D\ \begin{cases} 0 \geq x^2 - y \\ -1 \leq x^2 - y \\ 1 \leq x + y \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad D\ \begin{cases} -1 \leq x^2 - y \leq 0 \\ 1 \leq x + y \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Fazendo a mudança de variável $\begin{cases} u = x^2 - y \\ v = x + y \end{cases}$ com

jacobiano $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{2x+1}$, como

$\dfrac{1}{2x+1} \geq 0 \ \Rightarrow \ x > -\dfrac{1}{2}$ e D está no 1º quadrante o integral fica

$$\iint_{D'} (\cancel{2x+1})\left(e^u + e^v\right)\frac{du\,dv}{\cancel{2x+1}} = \iint_{D'} \left(e^u + e^v\right) du\,dv \quad \text{com} \quad D\ \begin{cases} -1 \leq u \leq 0 \\ 1 \leq v \leq 2 \end{cases}$$

portanto

$$\iint_D (2x+1)\ (e^{x^2-y} + e^{x+y})dxdy = \int_{v=1}^{2}\int_{u=-1}^{0} \left(e^u + e^v\right) du\,dv = \int_{v=1}^{2}\int_{u=-1}^{0} e^u\,du\,dv + \int_{v=1}^{2}\int_{u=-1}^{0} e^v\,du\,dv =$$

$$= \left[v\right]_1^2 \left[e^u\right]_{-1}^0 + \left[u\right]_{-1}^0 \left[e^v\right]_1^2 = e^2 - e - \frac{1}{e} + 1$$

(b) O domínio está indicado na Figura 2.

O primeiro integral é de cálculo imediato:

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} x^2 dy = \int_0^1 x^2 \left[y\right]_0^{x^2} dx = \int_0^1 x^4\ dx = \frac{1}{5}\left[x^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}$$

Quanto ao segundo corresponde a um domínio que é um sector circular, usaremos coordenadas polares.

Comecemos por centrar o domínio fazendo[2] $\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y \end{cases}$, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$ e o integral fica

---

[1] Repare-se que podíamos ter escolhido $0 \leq y - x^2 \leq 1$ mas optamos por $-1 \leq x^2 - y \leq 0$ uma vez que $x^2 - y$ figura na função integranda.

[2] $y = \sqrt{2x - x^2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$

$$\int_{u=0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\int_{v=u}^{\sqrt{1-u^2}}(u+1)^2\,du\,dv=\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{r=0}^{1}(r\cos\theta+1)^2\,r\,dr\,d\theta=$$

$$=\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{r=0}^{1}\left(r^3\cos^2\theta+r+2r^2\cos\theta\right)dr\,d\theta=$$

$$=\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta\int_{r=0}^{1}r^3dr+\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{r=0}^{1}rdr+2\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_{r=0}^{1}r^2dr=$$

$$=\frac{1}{8}\left[r^4\right]_0^1\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta+\left[\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1+\frac{2}{3}\left[\operatorname{sen}\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[r^3\right]_0^1=$$

$$=\frac{1}{8}\left[\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{16}\left[\operatorname{sen}2\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{8}+\frac{2}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{5\pi}{32}+\frac{29}{48}-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

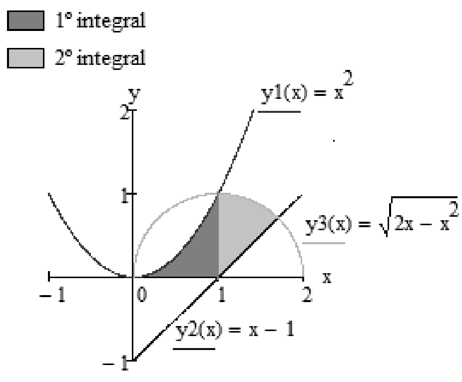

Figura 2

e

$$\int_0^1 dx\int_0^{x^2}x^2\,dy\;+\;\int_1^{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_{x-1}^{\sqrt{2x-x^2}}x^2\,dy=\frac{1}{5}+\frac{5\pi}{32}+\frac{29}{48}-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

2. Fazendo $y=\dfrac{t}{x}$ tem-se $dy=\dfrac{dt}{x}-\dfrac{t\,dx}{x^2}$ e a equação fica:

$$\frac{t}{x}f(t)dx+x\,g(t)\left(\frac{dt}{x}-\frac{t\,dx}{x^2}\right)=0$$

$$\frac{t}{x}f(t)dx+g(t)dt-\frac{t\,g(t)dx}{x}=0$$

$$\left(\frac{t}{x}f(t)-\frac{t\,g(t)}{x}\right)dx+g(t)dt=0$$

e finalmente $\dfrac{dx}{x}+\left(\dfrac{g(t)}{f(t)-g(t)}\right)\dfrac{dt}{t}=0$ que é de variáveis separadas c.q.d.

3.

(a) Se $\lambda=f(y)$ é factor integrante, a equação $f(y)P(x,y)dx+f(y)Q(x,y)dy=0$ é diferencial exacta, isto é, existe uma função $F(x,y)$ tal que

$$f\,P=\frac{\partial F}{\partial x}\quad\wedge\quad f\,Q=\frac{\partial F}{\partial y}$$

então (*Teorema de Schwarz*):

$$\frac{\partial}{\partial y}(f\;P)=\frac{\partial}{\partial x}(f\;Q)$$

Fazendo as derivadas e tendo em conta que $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$ obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}P+f\,\frac{\partial P}{\partial y}=f\,\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}$$

integrando:
$$\int\frac{f'}{f}dy=\int\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}\,dy$$

$$\ln\left|f\right|=\int\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}\,dy$$

e finalmente: $f(y)=e^{\int\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}dy}=e^{-\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{P}dy}$ que é a expressão procurada.

(b)

$$(2xy+y^3)dx+(x^2+3xy^2-x^2y-xy^3+4)dy=0$$

$$\begin{array}{cc}\downarrow\frac{\partial P}{\partial y} & \downarrow\frac{\partial Q}{\partial x}\\ 2x+3y^2 & 2x+3y^2-2xy-y^3\end{array}$$

$\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{P}=\frac{2xy+y^3}{2xy+y^3}=1$ é função exclusivamente de y, então o factor integrante é

$\lambda=e^{-\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{P}dy}=e^{-y}$ e a equação $e^{-y}(2xy+y^3)dx+e^{-y}(x^2+3xy^2-x^2y-xy^3+4)dy=0$ é diferencial exacta.

Isso significa que existe uma função $f(x,y)$ tal que

$$df=e^{-y}(2xy+y^3)dx+e^{-y}(x^2+3xy^2-x^2y-xy^3+4)dy=0$$

portanto

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^{-y}(2xy+y^3)\quad\wedge\quad\frac{\partial f}{\partial y}=e^{-y}(x^2+3xy^2-x^2y-xy^3+4)$$

$$\partial f=e^{-y}(2xy+y^3)\partial x\quad\wedge\quad\partial f=e^{-y}(x^2+3xy^2-x^2y-xy^3+4)\partial y$$

$$\int\partial f=\int e^{-y}(2xy+y^3)\partial x\quad\wedge\quad\int\partial f=\int e^{-y}(x^2+3xy^2-x^2y-xy^3+4)\partial y$$

$$f=\int e^{-y}(2xy+y^3)\partial x\quad\wedge\quad f=\int e^{-y}(x^2+3xy^2-x^2y-xy^3+4)\partial y$$

$$f=\left(x^2y+xy^3\right)e^{-y}+g(y)\quad\wedge\quad f=\left(x^2y+xy^3\right)e^{-y}-4e^{-y}+h(x)$$

onde $g(y)$ e $h(x)$ são funções arbitrárias, respectivamente de y e de x.
Deverá então ter-se $g(y)=-4e^{-y}\ \wedge\ h(x)=0$, então $f=\left(x^2y+xy^3\right)e^{-y}-4e^{-y}$, e como $df=0$, a solução é $f=C$ isto é

$$\left(x^2y+xy^3-4\right)e^{-y}=C\quad\text{ou}\quad x^2y+xy^3-4=Ce^y$$

4.

(a) Se $y=\dfrac{1}{z-x}$ será $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\partial y}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{(z-x)^2}-\dfrac{1}{(z-x)^2}z'$ e a equação fica

$$\frac{x}{(z-x)^2}-\frac{x}{(z-x)^2}z'+\frac{x}{(z-x)^2}+\frac{2}{z-x}+\frac{x^3}{(z-x)^2}\ln x=0$$

$$z'-\frac{2}{x}z=x^2\ln x$$

que é linear de 1ª ordem.

O factor integrante é $\lambda=e^{-2\int\frac{dx}{x}}=\dfrac{1}{x^2}$ e a solução é:

$$\frac{z}{x^2}=\int\ln x\,dx$$

Integrando por partes fica: $\dfrac{z}{x^2}=x\ln x-x+C$

Como $y=\dfrac{1}{z-x}\Rightarrow z=\dfrac{1}{y}+x$:

$$\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{x}=x\ln x-x+C \quad \text{ou} \quad \frac{1}{y}+x=x^3\ln x-x^3+Cx^2$$

(b) $ydx=\left(2x+\sqrt{xy^5}\right)dy \quad\Leftrightarrow\quad x'-\dfrac{2}{y}x=\sqrt{y^3}\;x^{\frac{1}{2}}$ é uma equação de Bernoulli [3].

Comecemos por dividir a equação por $x^{\frac{1}{2}}$:

$$\frac{x'}{\sqrt{x}}-\frac{2}{y}\frac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{y^3} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x'}{\sqrt{x}}-\frac{2}{y}\sqrt{x}=\sqrt{y^3}$$

e fazendo $z=\sqrt{x}$; $z'=\dfrac{x'}{2\sqrt{x}}\Rightarrow\dfrac{x'}{\sqrt{x}}=2z'$ obtemos a equação

$$2z'-\frac{2}{y}z=\sqrt{y^3}$$

$$z'-\frac{1}{y}z=\frac{\sqrt{y^3}}{2}$$

que é linear de 1ª ordem.

O factor integrante é $\lambda=e^{-\int\frac{dy}{y}}=\dfrac{1}{y}$ e a solução é

$$\frac{z}{y}=\frac{1}{2}\int\frac{y^{\frac{3}{2}}}{y}dy=\frac{1}{2}\int y^{\frac{1}{2}}dy=\frac{1}{3}\sqrt{y^3}+C$$

ou seja: $\dfrac{\sqrt{x}}{y}=\dfrac{1}{3}\sqrt{y^3}+C \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{x}=\dfrac{1}{3}y^2\sqrt{y}+Cy$ que é a solução.

---

[3] É da forma $x'+P(y)x=Q(y)\,x^n$.

5.

(a) Se $y=e^{2x}$ é solução da homogénea, ter-se-á

$$\left(e^{2x}\right)^{(4)}-4\left(e^{2x}\right)^{(3)}+9\left(e^{2x}\right)^{(2)}+a\left(e^{2x}\right)^{(1)}=0$$
$$16\,e^{2x}-32\,e^{2x}+36\,e^{2x}+2a\,e^{2x}=0$$
$$16-32+36+2a=0 \;\Rightarrow\; a=-10$$

então a equação é: $$y^{IV}-4y'''+9y''-10y'=0$$

A equação característica é $$k^4-4k^3+9k^2-10k=0$$
$$k(k^3-4k^2+9k-10)=0$$

Uma raiz do polinómio $k^3-4k^2+9k-10$ é 2, dividindo então o polinómio por $k-2$:

$$\begin{array}{rl|l}
 & k^3-4k^2+9k-10 & k-2 \\ \cline{3-3}
 & -k^3+2k^2 & k^2-2k+5 \\ \cline{2-2}
 & -2k^2+9k-10 & \\
 & 2k^2-4k & \\ \cline{2-2}
 & 5k-10 & \\
 & -5k+10 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

fica $k(k-2)(k^2-2k+5)=0$ portanto $k=0, k=2,\ k=1\pm 2i$

e a solução é: $$y_{GH}(x)=A+Be^{2x}+e^x\left(C\cos 2x+D\operatorname{sen}2x\right)$$

(b) Como $-\dfrac{5e^x}{e^{2x+1}}=-\dfrac{5}{e}e^{-x}$ será $P_1(x)=\alpha e^{-x}$ [4]

Para $4xe^{2x}$, como $(\beta x+\gamma)e^{2x}$ não é independente da solução geral da homogénea teremos
$$P_2(x)=(\beta x^2+\gamma x)e^{2x}$$

Para $-\dfrac{1}{4}xe^x\operatorname{sen}x$ será $P_3(x)=(\alpha x+\beta)e^x\operatorname{sen}x+(\gamma x+\delta)e^x\cos x$.

Para $\dfrac{1}{4}e^x\cos 2x$ como $\alpha\, e^x\cos 2x$ não é independente da solução geral da homogénea teremos
$$P_4(x)=\alpha\, x\, e^x\cos 2x+\beta\, x\, e^x\operatorname{sen}2x$$

6. É uma equação de Euler. Seja $x=e^t$ então $\dfrac{dx}{dt}=e^t$ e $\dfrac{dt}{dx}=e^{-t}$.

As derivadas que figuram na equação são
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}e^{-t} \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)\frac{dt}{dx}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}$$

[4] As letras gregas são constantes.

e a equação fica

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{t}{2} + \frac{5}{3}e^{-t}$$

As soluções da equação característica $k^2 + 3k + 2 = 0$ são -1 e -2 portanto a solução geral da equação homogénea é

$$y_{GH}(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$$

Quanto ás soluções particulares:

Para $\frac{t}{2}$ procura-se $P_1(t) = at + b$

$$P_1'(t) = a, \ P_1''(t) = 0$$

e a equação fica:

$$0 + 3a + 2(at + b) = \frac{t}{2}$$

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = -\frac{3}{8}$$

Para $\frac{5}{3}e^{-t}$ procura-se $P_2(t) = bte^{-t}$ [5]

$$P_2'(t) = b(1-t)e^{-t}, \quad P_2''(t) = b(t-2)e^{-t}$$

e a equação fica:

$$b(t-2) + 3b(1-t) + 2bt = \frac{5}{3}$$

$$b = \frac{5}{3}$$

Então a solução geral da equação completa é

$$y(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t} + \frac{t}{4} - \frac{3}{8} + \frac{5}{3}te^{-t}$$

ou seja:

$$y(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{\ln x}{4} - \frac{3}{8} + \frac{5}{3}\frac{\ln x}{x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

7. A equação característica é $m^4 + m^3 + 2m^2 - 4m = 0$ ou $m(m^3 + m^2 + 2m - 4) = 0$.

Uma solução do polinómio $m^3 + m^2 + 2m - 4$ é $m = 1$, dividindo então por $m - 1$:

$$\begin{array}{r|l}
m^3 + m^2 + 2m - 4 & m - 1 \\ \cline{2-2}
-m^3 + m^2 \qquad\qquad & m^2 + 2m + 4 \\ \cline{1-1}
2m^2 + 2m + 4 & \\
-2m^2 + 2m \quad\; & \\ \cline{1-1}
4m - 4 & \\
-4m + 4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

fica $\quad m(m-1)(m^2 + 2m + 4) = 0$

e as raízes são $0, 1, -1 \pm \sqrt{3}\,i$. A raiz complexa corresponde a $\theta = \frac{2\pi}{3}, \ \rho = 2$ pelo que a solução geral da equação homogénea é

[5] Porque be^{-t} não é independente da solução geral da equação homogénea.

$$y_{GH(k)} = A + 2^k\left(B\cos\frac{2k\pi}{3} + C\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{3}\right)$$

A solução particular é do tipo $y_{Pk} = ak$:

$$y_{Pk} = ak, \quad y_{Pk+1} = ak + a, \quad y_{Pk+2} = ak + 2a, \; y_{Pk+3} = ak + 3a, \; y_{Pk+4} = ak + 4a$$

então deve ter-se $ak + 4a + ak + 3a + 2(ak + 2a) - 4ak - 4a = 14 \;\Rightarrow\; a = \frac{14}{7} = 2$ logo

$$y_{Pk} = 2k$$

e a solução geral da equação completa é

$$y_k = A + 2^k\left(B\cos\frac{2k\pi}{3} + C\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{3}\right) + 2k$$