PROVA 835/13 Págs.

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

10.º/11.º ou 11.º/12.º Anos de Escolaridade

(Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Duração da prova: 150 minutos **1.ª FASE**

2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA APLICADA ÀS CIÊNCIAS SOCIAIS

V.S.F.F.

Identifique claramente os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que implicam a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 11.

A prova inclui um formulário (páginas 12 e 13).

Pode utilizar material de desenho (régua, compasso, esquadro e transferidor) e calculadora gráfica.

Nos itens de resposta aberta com cotação igual ou superior a 15 pontos, cerca de 10% da cotação é atribuída à comunicação escrita em língua portuguesa.

Em todos os itens da prova, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Apresente uma única resposta a cada item. Se escrever mais do que uma resposta, deve indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada (riscando a(s) que pretende anular).

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à sua calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

• sempre que recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora, apresente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);

• sempre que recorrer a uma tabela obtida na sua calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;

• sempre que recorrer a estatísticas obtidas na sua calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente as listas que introduziu na calculadora para as obter.

1. Numa Assembleia-geral de uma federação desportiva, na qual estavam presentes representantes de várias regiões do país, foi decidida a forma de representação regional em futuras assembleias-gerais, de acordo com os seguintes princípios:

- o número de representantes de cada região na assembleia-geral deveria estar de acordo com o número de praticantes federados existentes nessa região;
- o número total de representantes na Assembleia seria 50;
- seria utilizado o método de Hamilton para distribuir os representantes pelas várias regiões.

Segundo o método de Hamilton, a distribuição dos representantes pelas várias regiões faz-se da seguinte forma:

- calcula-se o «Divisor Padrão» (DP), dividindo o número total de praticantes federados (TP) pelo número total de representantes a atribuir (R). O divisor padrão é, portanto, o número de praticantes por cada representante;
- a seguir, calcula-se a «Quota Padrão» (QP) para cada uma das regiões, dividindo o número de praticantes federados dessa região pelo divisor padrão;
- a cada região é atribuído, inicialmente, um número de representantes igual à parte inteira da respectiva quota padrão. Cada uma dessas partes inteiras designa-se por «Quota Inferior» (QI) da região. Se o número de representantes distribuídos for igual ao número total de representantes a distribuir (R), o processo termina;
- caso ainda restem representantes por distribuir, ordenam-se, por ordem decrescente, as partes decimais das várias quotas padrão e atribuem-se os representantes que restam (um para cada região) às regiões que tiverem partes decimais maiores;
- Na atribuição do último representante, se houver duas regiões com a mesma parte decimal, atribui-se o último representante à região com menor número de representantes.

Na tabela abaixo, estão indicados os números de praticantes das várias regiões representadas na Assembleia-geral.

REGIÕES	NÚMERO DE PRATICANTES
Minho	561
Beiras	345
Alentejo	120
Ribatejo	870
Algarve	310
TOTAL	2 206

1.1. Copie para a sua folha de prova a tabela a seguir apresentada e, depois, complete-a.
Calcule o divisor padrão com **três casas decimais** e utilize-o para calcular as quotas padrão com **três casas decimais**.

REGIÕES	NÚMERO DE PRATICANTES *(P)*	QUOTA PADRÃO *(P : DP)*	QUOTA INFERIOR *(QI)*	PARTE DECIMAL
Minho	561			
Beiras	345			
Alentejo	120			
Ribatejo	870			
Algarve	310			

2 206	NÚMERO TOTAL DE PRATICANTES *(TP)*
50	REPRESENTANTES A DISTRIBUIR *(R)*
	DIVISOR PADRÃO **(*DP = TP : R*)**

1.2. Determine o número de representantes de cada região nas assembleias-gerais, de acordo com a aplicação do método de Hamilton.

1.3. Dirigentes desportivos da Região Autónoma da Madeira pretendem que a sua região, com 130 praticantes federados, tenha também representantes na Assembleia-geral. Face à situação, foi decidido alterar para 53 o número total de representantes, tendo em conta o aumento do número de regiões representadas.

1.3.1. A tabela seguinte representa a situação da referida federação com as suas seis regiões.

REGIÕES	NÚMERO DE PRATICANTES *(P)*	QUOTA PADRÃO *(P : DP)*	QUOTA INFERIOR *(QI)*	PARTE DECIMAL
Minho	561			
Beiras	345			
Alentejo	120			
Ribatejo	870			
Algarve	310			
Madeira	130			

2 336	NÚMERO TOTAL DE PRATICANTES *(TP)*
53	REPRESENTANTES A DISTRIBUIR *(R)*
	DIVISOR PADRÃO *(DP = TP : R)*

Copie para a sua folha de prova a tabela acima apresentada e complete-a.

Calcule o divisor padrão com **três casas decimais** e utilize-o para calcular as quotas padrão com **três casas decimais**.

1.3.2. Depois de completar a tabela anterior, elabore um texto sobre a distribuição dos representantes das seis regiões na Assembleia-geral.

O texto deve incluir:

- uma alusão à opção de o número de delegados passar de 50 para 53, relacionando-o com o novo divisor padrão;
- uma comparação, região a região, do número de representantes nos dois cenários (antes e após a entrada da Madeira) e um comentário sobre se alguma região terá razões para se sentir prejudicada pela entrada da região da Madeira na federação.

2. O imposto sobre os rendimentos de pessoas singulares (IRS) é definido de forma que sejam aplicadas taxas de imposto mais altas às famílias com rendimentos que se enquadram nos escalões mais elevados. Para calcular o imposto a pagar por uma determinada família, num certo ano, é necessário calcular o «rendimento colectável» e a «colecta» relativos a essa família.

O «rendimento colectável» é a parte do rendimento global auferido por um contribuinte, durante um ano, sujeita a imposto. No caso de um casal sem filhos, o rendimento colectável é calculado dividindo por dois a soma dos rendimentos do marido e da mulher, no ano considerado. Na tabela seguinte, são apresentados os escalões, os rendimentos colectáveis, as taxas correspondentes e, na última coluna, um montante em euros denominado «Parcela a abater».

A «colecta» é o imposto a pagar, caso não haja deduções a fazer.

Os escalões de rendimento colectável e as respectivas taxas, para os contribuintes residentes no Continente, em 2005, eram:

Escalões	Rendimento colectável (em euros)	Taxa (em %)	Parcela a abater (em euros)
1	Até 4 351	10,5	0,00
2	De 4 351,01 até 6 581	13,0	108,78
3	De 6 581,01 até 16 317	23,5	799,78
4	De 16 317,01 até 37 528	34,0	2 513,06
5	De 37 528,01 até 54 388	36,5	3 451,26
6	Mais de 54 388	40,0	5 354,82

A seguir apresenta-se o procedimento simplificado para o cálculo do imposto a pagar por casais sem filhos. Trata-se de um exemplo em que o rendimento global do casal é de € 80 000 (soma dos rendimentos do marido e da mulher), ao qual corresponde um rendimento colectável de € 40 000, e que se encontra, portanto, no quinto escalão.

Cálculo do rendimento global do casal:
- Contribuinte A (marido), com um rendimento total de € 45 000.
- Contribuinte B (mulher), com um rendimento total de € 35 000.
- O rendimento global deste casal é € 80 000 (€ 45 000 + € 35 000).

Cálculo do rendimento colectável:
- O rendimento colectável é € 40 000 (80 000 : 2).

Cálculo da colecta do casal:
- Consultar a tabela anterior e verificar em que escalão se encontra o rendimento colectável (taxa a aplicar: 36,5%; parcela a abater: € 3 451,26);
- Aplicar a taxa de imposto ao rendimento colectável do casal:
  € 40 000 × 0,365 = € 14 600;
- Subtrair, do valor anteriormente obtido, a parcela a abater:
  € 14 600 – € 3 451,26 = € 11 148,74;
- A colecta do casal obtém-se multiplicando por 2 o valor anterior:
  € 11 148,74 × 2 = € 22 297,48.

Cálculo do IRS:
- IRS = colecta – deduções = € 22 297,48.

Neste caso simplificado, como não existem deduções a fazer, a colecta coincide com o valor do IRS.

Nos itens **2.1.** e **2.2.**, sempre que for necessário proceder a arredondamentos, utilize **duas casas decimais**.

2.1. Em 2005, o rendimento global de dois contribuintes casados, o Rui e a Luísa, foi de € 20 950, dado que os rendimentos do Rui foram € 10 950 e os da Luísa € 10 000.

Determine o correspondente valor de IRS que este casal pagou, relativo ao ano de 2005, admitindo que não houve quaisquer deduções a fazer à colecta e utilizando o procedimento simplificado apresentado na página anterior.

2.2. Em Dezembro de 2005, o Manuel e a Joana verificaram que o rendimento global do casal, nesse ano, era de € 13 000. Os rendimentos da Joana foram € 12 500 e os do Manuel € 500. Foi-lhes proposto prestarem um serviço, no Natal desse ano, pelo qual receberiam a quantia de € 1 000. O Manuel, após consultar a tabela das taxas de IRS, resolveu não aceitar o serviço, dizendo à Joana que «não queria perder dinheiro, dado que passariam do escalão de 13% para o de 23,5%».

Escreva um pequeno texto mostrando que o Manuel não tem razão. Apoie os seus argumentos em cálculos do IRS, com e sem a prestação do referido serviço. Suponha que o casal não estava sujeito, naquele ano, a quaisquer deduções à colecta. Utilize o procedimento simplificado anteriormente apresentado.

O texto deve incluir:

- o cálculo do IRS com a prestação do serviço, no Natal;
- o cálculo do IRS sem a prestação do serviço, no Natal;
- a comparação dos rendimentos e uma conclusão.

3. Num dos muitos *sites* em que se joga xadrez *online*, na *internet*, a entrada de um jogador é condicionada pelo gestor do *site*, com probabilidade fixa igual a 0,8, em cada tentativa de entrada na sala de jogo.

3.1. Com base neste número, calcule o valor exacto da probabilidade de um candidato conseguir entrar na sala de jogo **apenas** à terceira tentativa.

3.2. Para confirmar a probabilidade de um jogador entrar na sala à primeira tentativa, um utilizador do *site* fez um inquérito, por amostragem, onde perguntava aos frequentadores **presentes** na sala se tinham conseguido entrar à primeira tentativa. Um dos inquiridos, especialista em estatística, referiu que a concepção da amostragem estava errada.

Escreva uma pequena composição em que analise o parecer do especialista, esclarecendo de que forma esta restrição do universo dos inquiridos pode alterar o resultado do inquérito.

O texto deve incluir:

- uma alusão à restrição do universo dos inquiridos aos frequentadores que tenham conseguido aceder ao *site*;
- uma alusão à escolha de um outro universo, incidindo sobre todos os jogadores que tentassem aceder ao *site*, independentemente de terem conseguido entrar ou não;
- uma conjectura de como a escolha do primeiro universo pode afectar o valor estimado de 0,8 como probabilidade de entrar no *site* à primeira tentativa.

3.3. Com base no parecer do especialista de estatística utilizado na questão anterior, foi decidido estender o inquérito ao universo de todas as pessoas que tentaram aceder ao *site.* Em conformidade, numa amostra com 50 inquiridos, o número de respostas «Sim» à pergunta «Conseguiu entrar à primeira tentativa?» foi 39.

Com base nestes resultados, construa um intervalo com uma confiança de 95% para a proporção de pessoas que, efectivamente, conseguiram entrar à primeira tentativa.

Nos cálculos intermédios, utilize **quatro casas decimais.** Relativamente aos extremos do intervalo, apresente-os **arredondados às milésimas**.

3.4. O gestor do *site* decidiu estudar a evolução do número de jogadores de xadrez, desde o lançamento do *site* até à sexagésima semana, para o que foi registando o número de jogadores, de cinco em cinco semanas, tendo obtido a tabela seguinte:

Tempo (em semanas) (x)	**Número de jogadores (em milhares)** (y)
5	20
10	46
15	58
20	82
25	110
30	128
35	136
40	163
45	170
50	194
55	210
60	245

Represente **na sua calculadora** o diagrama de dispersão dos dados e determine a equação da recta de regressão linear, $y = a\,x + b$, indicando os valores de a e b com uma **aproximação às centésimas**.

Transcreva para a sua folha de prova um esboço, no mesmo referencial, dos gráficos obtidos (diagrama de dispersão e recta de regressão linear).

FIM

COTAÇÕES

1. .... **60 pontos**

1.1. .... 13 pontos

1.2. .... 13 pontos

1.3. .... 34 pontos

1.3.1. .... 15 pontos

1.3.2. .... 19 pontos

2. .... **50 pontos**

2.1. .... 25 pontos

2.2. .... 25 pontos

3. .... **90 pontos**

3.1. .... 25 pontos

3.2. .... 25 pontos

3.3. .... 15 pontos

3.4. .... 25 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

FORMULÁRIO

TEORIA MATEMÁTICA DAS ELEIÇÕES

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados pela ordem decrescente da sua grandeza numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respectivo; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.

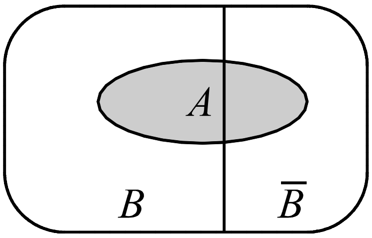
MODELOS DE GRAFOS

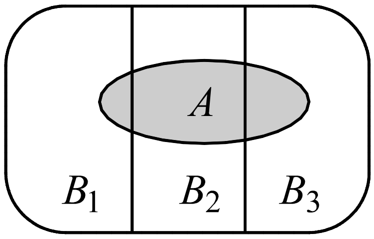
Condição necessária e suficiente para que um grafo admita circuitos de Euler

Um grafo admite circuitos de Euler se e só se é conexo e todos os seus vértices são de grau par.

PROBABILIDADES

Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes





$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$

$$= P(B) \times P(A|B) \ + \ P(\overline{B}) \times P(A|\overline{B})$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$

$$= P(B_1) \times P(A|B_1) \ + \ P(B_2) \times P(A|B_2) \ + \ P(B_3) \times P(A|B_3)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A|B)}{P(B) \times P(A|B) \ + \ P(\overline{B}) \times P(A|\overline{B})}$$

$$P(B_k|A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A|B_k)}{P(B_1) \times P(A|B_1) \ + \ P(B_2) \times P(A|B_2) + P(B_3) \times P(A|B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3.

INTERVALOS DE CONFIANÇA

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n - dimensão da amostra

$\overline{x}$ - média amostral

σ - desvio padrão da variável

z - valor relacionado com o nível de confiança ($*$)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\,\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n - dimensão da amostra

$\overline{x}$ - média amostral

s - desvio padrão amostral

z - valor relacionado com o nível de confiança ($*$)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}\ ,\ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n - dimensão da amostra

$\hat{p}$ - proporção amostral

z - valor relacionado com o nível de confiança ($*$)

($*$) **Valores de z para os níveis de confiança mais usuais**

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576