

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
2000

1.ª Fase
2.ª Chamada

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

(Adaptação para invisuais)

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x + 5 & \text{se } x < 4 \\ 1 & \text{se } x = 4 \\ x^2 + 1 & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4)$ e $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$
- (B) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = f(4)$ e $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \neq f(4)$
- (C) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq f(4)$ e $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4)$
- (D) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq f(4)$ e $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \neq f(4)$

2. Seja g uma função cujo gráfico tem um ponto de inflexão de abcissa 1.

Qual das seguintes poderá ser a expressão analítica da **segunda derivada** de g ?

(A) $g''(x) = 1$

(B) $g''(x) = -1$

(C) $g''(x) = (x - 1)^2$

(D) $g''(x) = x - 1$

3. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} e contradomínio $[-3, 2]$.
Qual é o contradomínio de $|f|$?

(A) $[2, 3]$

(B) $[-2, 3]$

(C) $[0, 2]$

(D) $[0, 3]$

4. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, a esfera definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Admita que um ponto P se desloca ao longo do diâmetro que está contido no eixo Oz .

Para cada posição do ponto P , considere o plano que contém P e é paralelo ao plano xOy .

Seja g a função que faz corresponder, à cota c do ponto P , a área a da secção produzida na esfera pelo referido plano.

Qual é o valor de $g(0)$?

(A) 0

(B) 1

(C) $\frac{\pi}{2}$

(D) π

5. Num referencial o.n. xOy , considere uma parábola cuja directriz tem equação $x = 1$.
 P é um ponto da parábola, de abcissa 4.

Qual é a distância de P ao foco da parábola?

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

6. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere o plano α , de equação $x = y$.
Qual dos seguintes pontos é o simétrico do ponto $P(1, 0, 0)$, em relação ao plano α ?
- (A) $A(-1, 0, 0)$ (B) $B(1, -1, 0)$
(C) $C(1, 0, 1)$ (D) $D(0, 1, 0)$
7. Considere dois planos concorrentes α e β .
Sejam \vec{a} e \vec{b} vectores normais a α e a β , respectivamente.
Seja \vec{r} um vector com a direcção da recta de intersecção de α e β .
Qual das afirmações seguintes é verdadeira?
- (A) \vec{r} é paralelo a \vec{a} e \vec{r} é paralelo a \vec{b}
(B) \vec{r} é paralelo a \vec{a} e \vec{r} é perpendicular a \vec{b}
(C) \vec{r} é perpendicular a \vec{a} e \vec{r} é paralelo a \vec{b}
(D) \vec{r} é perpendicular a \vec{a} e \vec{r} é perpendicular a \vec{b}
8. Considere todos os números de seis algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.
Destes números, quantos têm exactamente um algarismo 4?
- (A) 8^5 (B) 9^5 (C) 6×8^5 (D) $6 \times {}^8A_5$
9. O António escolhe, ao acaso, uma página de um jornal de oito páginas.
A Ana escolhe, ao acaso, uma página de uma revista de quarenta páginas.
Qual é a probabilidade de ambos escolherem a página 5?
- (A) $\frac{1}{320}$ (B) $\frac{3}{20}$ (C) $\frac{1}{48}$ (D) $\frac{5}{48}$

Segunda Parte

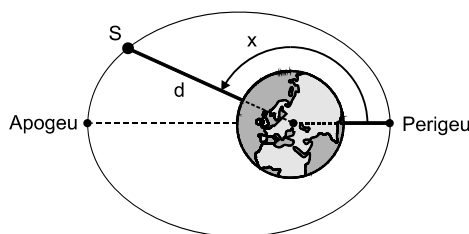
Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Um satélite **S** tem uma órbita elíptica em torno da Terra, tal como se representa na figura. Tenha em atenção que os elementos nela desenhados não estão na mesma escala.

Na elipse estão assinalados dois pontos:

- o *apogeu*, que é o ponto da órbita mais afastado do centro da Terra;
- o *perigeu*, que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra.



O ângulo x , assinalado na figura, tem o seu vértice no centro da Terra; o seu lado origem passa no *perigeu*, o seu lado extremidade passa no satélite e a sua amplitude está compreendida entre 0 e 360 graus.

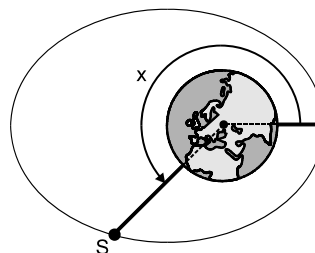
A distância d , em km, do satélite ao **centro** da Terra, é dada por
$$d = \frac{7\,800}{1+0,05 \cos x}$$

Considere que a Terra é uma esfera de raio 6 378 km.

- 1.1. Determine a altitude do satélite (distância à **superfície** da Terra) quando este se encontra no *apogeu*. Apresente o resultado em km, arredondado às unidades.
- 1.2. Num certo instante, o satélite está na **posição indicada na figura junta**.

A distância do satélite ao **centro** da Terra é, então, de 8 000 km.

Determine o valor de x , em graus.



2. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$

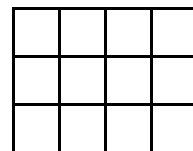
Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, **sem** utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

- 2.1. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

- 2.2. Resolva a equação $\ln[f(x)] = x$ (\ln designa *logaritmo* de base e)

- 2.3. Estude a função f quanto à existência de assíntotas verticais e horizontais do seu gráfico.

3. Uma caixa tem doze compartimentos para colocar iogurtes (ver figura). Em cada compartimento cabe apenas um iogurte.



- 3.1. De quantas maneiras diferentes podemos colocar nove iogurtes nessa caixa, sabendo que seis iogurtes são naturais (e portanto indistinguíveis) e os restantes três são de frutas (um de morango, um de banana e um de ananás) ?

- 3.2. Colocando ao acaso, na caixa vazia, quatro iogurtes, qual é a probabilidade de ficarem todos na mesma fila? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere uma pirâmide quadrangular regular $[OPQRV]$, cuja base $[OPQR]$ é tal que O coincide com a origem do referencial, P tem coordenadas $(6, 0, 6)$ e R tem coordenadas $(0, 6, 0)$.
- 4.1. Sendo C o centro da base da pirâmide, indique, justificando, o valor do produto escalar $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{CV}$
- 4.2. Determine uma equação vectorial da recta de intersecção do plano PQV com o plano xOy
- 4.3. Sabendo que a área lateral da pirâmide é 60 , determine as coordenadas do ponto V .

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... 81

Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada.....	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte 119

1. 25
 1.1. 11
 1.2. 14

2. 39
 2.1. 14
 2.2. 11
 2.3. 14

3. 22
 3.1. 11
 3.2. 11

4. 33
 4.1. 11
 4.2. 11
 4.3. 11

TOTAL200