

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos — Programa ajustado

Duração da prova: 120 minutos
2000

1.ª FASE
1.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

V.S.F.F.

435.V1/1

Na página 11 deste enunciado encontra-se um formulário que, para mais fácil utilização, pode ser destacado do resto da prova, em conjunto com esta folha.

Primeira Parte

- As sete questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para responder a cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = 0$

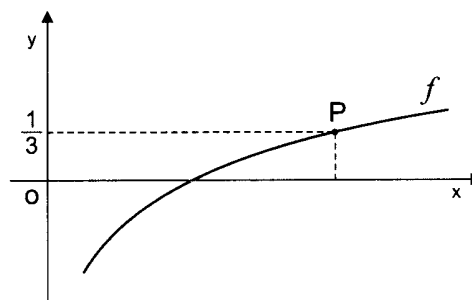
(B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = +\infty$

(C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x = 1$

(D) Não existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$

2. Na figura está parte da representação gráfica da função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \log_8 x$

P é um ponto do gráfico de f , que tem ordenada $\frac{1}{3}$



Qual é a abcissa do ponto P ?

(A) $\frac{8}{3}$

(B) 1

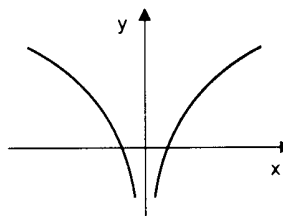
(C) $\ln\left(\frac{8}{3}\right)$

(D) 2

V.S.F.F.

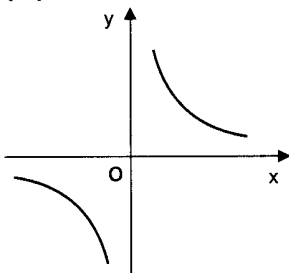
435.V1/3

3. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

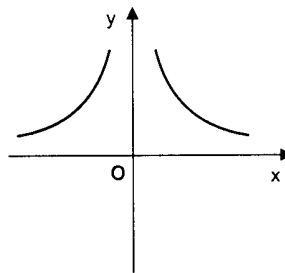


Qual das figuras seguintes poderá ser parte da representação gráfica da função g' , **derivada** de g ?

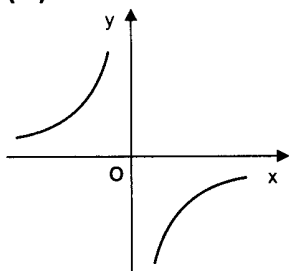
(A)



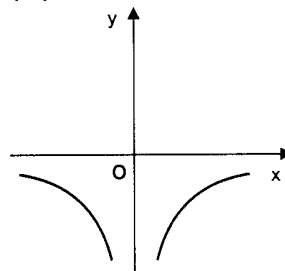
(B)



(C)



(D)



4. Um tanque tem a forma de um paralelepípedo rectângulo, com 7 m de comprimento, 5 m de largura e 4 m de altura.

Admita que o tanque está vazio.

Num certo instante, é aberta uma torneira que verte água para o tanque, à taxa de 2 m^3 por hora, até este ficar cheio.

Qual é a função que dá a **altura**, em metros, da água no tanque, t horas após a abertura da torneira?

(A) $h(t) = 4 - 2t$, $t \in [0, 70]$

(B) $h(t) = \frac{2t}{35}$, $t \in [0, 70]$

(C) $h(t) = 4 - 2t$, $t \in [0, 140]$

(D) $h(t) = \frac{2t}{35}$, $t \in [0, 140]$

5. Seja A um acontecimento possível, cuja probabilidade é diferente de 1. Qual é o valor da probabilidade condicionada $P(A|A)$?

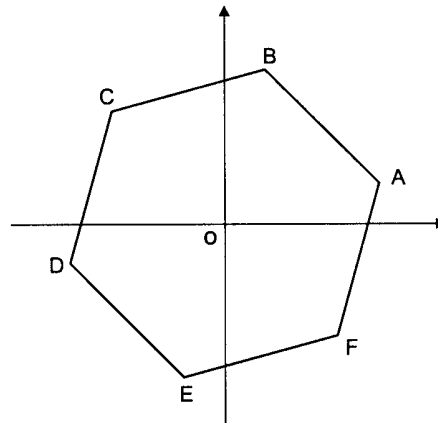
- (A) 0 (B) 1 (C) $P(A)$ (D) $[P(A)]^2$

6. Lança-se um dado com as faces numeradas de 1 a 6. Considere os acontecimentos:
 A : «sair face ímpar»;
 B : «sair face de número maior ou igual a 4».

Qual é o acontecimento **contrário** de $A \cup B$?

- (A) sair a face 1 ou a face 5 (B) sair a face 4 ou a face 6
(C) sair a face 2 (D) sair a face 5

7. Na figura está representado um hexágono cujos vértices são as imagens geométricas, no plano complexo, das raízes de índice 6 de um certo número complexo.



O vértice C é a imagem geométrica do número complexo

$$\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{3\pi}{4}$$

Qual dos seguintes números complexos tem por imagem geométrica o vértice D ?

- (A) $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}$ (B) $\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{13\pi}{12}$
(C) $\sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \frac{7\pi}{6}$ (D) $\sqrt[6]{2} \operatorname{cis} \frac{13\pi}{12}$

V.S.F.F.

435.V1/5

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Seja A o conjunto dos números complexos cuja imagem, no plano complexo, é o interior do círculo de centro na origem do referencial e raio 1.

1.1. Defina, por meio de uma condição em \mathbb{C} , a parte de A contida no segundo quadrante (excluindo os eixos do referencial).

1.2. Sem recorrer à calculadora, mostre que o número complexo $\frac{1 + \sqrt{3}i}{4 \operatorname{cis} \frac{\pi}{6}}$ pertence ao conjunto A .

2. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = e^x(x^2 + x)$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, **sem** utilização da calculadora), resolva as alíneas seguintes:

2.1. Verifique que $f'(x) = e^x(x^2 + 3x + 1)$ e determine uma equação da recta tangente ao gráfico de f , no ponto de abcissa 0.

2.2. Estude f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.



3. No presente ano civil, em Lisboa, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol, no dia de ordem n do ano, é dado em horas, aproximadamente, por

$$f(n) = 12,2 + 2,64 \operatorname{sen} \frac{\pi(n-81)}{183} \quad n \in \{1, 2, 3, \dots, 366\}$$

(o argumento da função seno está expresso em radianos).

Por exemplo: no dia 3 de Fevereiro, trigésimo quarto dia do ano, o tempo que decorreu entre o nascer e o pôr do Sol foi de $f(34) \approx 10,3$ horas.

- 3.1. No dia 24 de Março, Dia Nacional do Estudante, o Sol nasceu às seis e meia da manhã. Em que instante ocorreu o pôr do Sol? Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).

Notas:

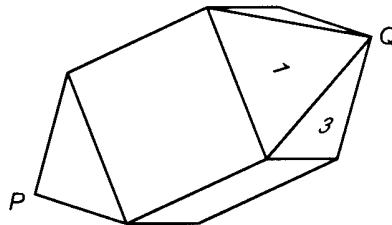
- Recorde que, no presente ano, o mês de Fevereiro teve 29 dias.
- Sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

- 3.2. Em alguns dias do ano, o tempo que decorre entre o nascer e o pôr do Sol é superior a 14,7 horas. Recorrendo à sua calculadora, determine em quantos dias do ano é que isso acontece. Indique como procedeu.

V.S.F.F.

435.V1/7

4. Na figura está representado um poliedro com doze faces, que pode ser decomposto num cubo e em duas pirâmides quadrangulares regulares.



- 4.1. Pretende-se numerar as doze faces do poliedro, com os números de 1 a 12 (um número diferente em cada face).

Como se vê na figura, duas das faces do poliedro já estão numeradas, com os números 1 e 3.

- 4.1.1. De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números?

- 4.1.2. De quantas maneiras podemos numerar as outras dez faces, com os restantes dez números, de forma a que, nas faces de uma das pirâmides, fiquem só números ímpares e, nas faces da outra pirâmide, fiquem só números pares?

- 4.2. Considere agora o poliedro num referencial o. n. $Oxyz$, de tal forma que o vértice P coincida com a origem do referencial, e o vértice Q esteja no semieixo positivo Oy . Escolhidos ao acaso três vértices distintos, qual é a probabilidade de estes definirem um plano paralelo ao plano de equação $y = 0$? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

5. Considere uma função f de domínio \mathbb{R}^+ . Admita que f é positiva e que o eixo Ox é assíntota do gráfico de f . Mostre que o gráfico da função $\frac{1}{f}$ não tem assíntota horizontal.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte **63**

Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada.....	-3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **137**

1.	21
1.1.	9
1.2.	12
2.	33
2.1.	15
2.2.	18
3.	33
3.1.	15
3.2.	18
4.	32
4.1.	18
4.1.1.	7
4.1.2.	11
4.2.	14
5.	18

TOTAL **200**

V.S.F.F.

435.V1/9

Formulário

Áreas de figuras planas

$$\text{Losango: } \frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$$

$$\text{Trapézio: } \frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$$

$$\text{Polígono regular: } \text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$$

$$\text{Círculo: } \pi r^2 \quad (r - \text{raio})$$

Áreas de superfícies

$$\text{Área lateral de um cone: } \pi r g \\ (r - \text{raio da base; } g - \text{geratriz})$$

$$\text{Área de uma superfície esférica: } 4 \pi r^2 \\ (r - \text{raio})$$

Volumes

$$\text{Prisma: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cilindro: } \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Pirâmide: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Cone: } \frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$$

$$\text{Esfera: } \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (r - \text{raio})$$

Trigonometria

$$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$

$$\text{cos}(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Complexos

$$(\rho \text{ cis } \theta) \cdot (\rho' \text{ cis } \theta') = \rho \rho' \text{ cis } (\theta + \theta')$$

$$\frac{\rho \text{ cis } \theta}{\rho' \text{ cis } \theta'} = \frac{\rho}{\rho'} \text{ cis } (\theta - \theta')$$

$$(\rho \text{ cis } \theta)^n = \rho^n \text{ cis } (n \theta)$$

$$\sqrt[n]{\rho \text{ cis } \theta} = \sqrt[n]{\rho} \text{ cis } \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\text{sen } u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\text{cos } u)' = -u' \cdot \text{sen } u$$

$$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$